

Einheitskreise der L_p -Normen und ihre Bounds

Abbildung 1 zeigt die Einheitskreise gemäß der L_1 - (Manhattan-), L_2 - (Euklidischen) und L_∞ - (Maximums-)Normen.

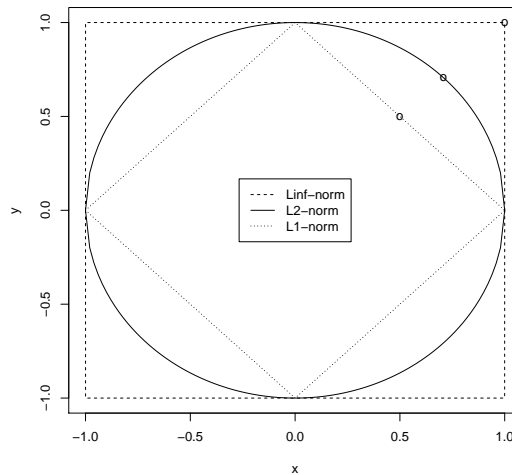


Abbildung 1: Einheitskreise

In der Übung wurde gezeigt, dass die Maximumsnorm eine untere Schranke für alle L_p -Normen darstellt:

$$d_{L_\infty}(x, y) \leq d_{L_p}(x, y), \text{ für alle } p \geq 1.$$

Dies stimmt mit den abgebildeten Einheitskreisen überein.

Sucht man Punkte einer gegebenen Entfernung vom Anfragepunkt, so sind diese notwendigerweise bei unteren Schranken (deren berechnete Entfernung immer kleiner ist als die genaue Berechnung) **weiter** vom Anfragepunkt entfernt. Deshalb ist z.B. die Maximumsnorm in Abbildung 1 weiter vom Mittelpunkt entfernt als die euklidische Distanz.

Beispiel

Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist

$$d_{L_1}(x, y) = 1 \text{ erfüllt zB durch } y = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$d_{L_2}(x, y) = 1 \text{ erfüllt zB durch } y = \begin{pmatrix} 0,71 \\ 0,71 \end{pmatrix}.$$

$$d_{L_\infty}(x, y) = 1 \text{ erfüllt zB durch } y = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{pmatrix}.$$

Diese Punkte sind zur Illustration in Abbildung 1 eingezeichnet.