

Lineare Algebra (Review)

Vektoren

- k ist ein skalar
- \mathbf{b} ist ein Spaltenvektor
- b_i ist die i -te Komponente von \mathbf{b}
- \mathbf{b}^T ist die transponierte zu \mathbf{b} , ein Zeilenvektor

Matrizen

- A ist eine Matrix
- Ist A eine $k \times l$ -dimensionale Matrix, dann ist die transponierte A^T eine $l \times k$ -dimensionale Matrix; die Spalten (Zeilen) von A sind die Zeilen (Spalten) von A^T
- $a_{i,j}$ ist das Element von A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte
- \mathbf{a}_j ist der j -te Spaltenvektor von A

Multiplikation mit einem Skalar

- $\mathbf{c} = k\mathbf{b}$ ist ein Vektor der Dimensionalität von \mathbf{b} , mit $c_i = kb_i$
- $C = kA$ ist eine Matrix der Dimensionalität von A , mit $c_{i,j} = ka_{i,j}$

(Inneres) Produkt zweier Vektoren

- Summe über das Produkt der Komponenten zweier (gleich-dimensionaler) Vektoren
-

$$\mathbf{b}^T \mathbf{c} = \sum_{m=1}^l b_m c_m$$

ist ein Skalar

Multiplikation von zwei Matrizen

- Seien A eine $k \times l$ -dimensionale Matrix und C eine $p \times l$ -dimensionale Matrix (d.h. die Anzahl der Spalten ist gleich)
- Dann ist (Summe über das Produkt der m -ten Spalte von A mit der transponierten der m -ten Spalte von C (äußeres Produkt))

$$D = AC^T = \sum_{m=1}^l \mathbf{a}_m \mathbf{c}_m^T$$

eine $k \times p$ -dimensionale Matrix

- Ein Element von D lässt sich ebenfalls berechnen nach $d_{i,j} = \sum_{m=1}^l a_{i,m} c_{j,m}$ (Produkt der i -ten Zeile von A mit der transponierten j -ten Zeile von C (inneres Produkt)).

Multiplikation von zwei Matrizen (2)

- Spezialfall: $\mathbf{b}^T \mathbf{c} = \sum_{m=1}^l b_m c_m$ ist ein Skalar
- Spezialfall: Ist \mathbf{b} ein k -dimensionaler Vektor und \mathbf{c} ein p -dimensionaler Vektor, dann ist $A = \mathbf{b}\mathbf{c}^T$ ist eine $k \times p$ Matrix mit $a_{i,j} = b_i c_j$
- Spezialfall: Ist A eine $k \times l$ -dimensionale Matrix und ist \mathbf{b} ein l -dimensionaler Vektor, dann ist $\mathbf{c} = A\mathbf{b} = \sum_{j=1}^l \mathbf{a}_j b_j$ ein k -dimensionaler Vektor mit $c_i = \sum_{m=1}^l a_{i,m} c_m$

Rechenregel für Transponierte einer Matrix

-

$$\left(A^T\right)^T = A$$

-

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Einheitsmatrix



$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix Inverse

- Sei A eine quadratische Matrix
- Wenn eine eindeutige inverse Matrix A^{-1} existiert, dann gilt

$$A^{-1}A = I \quad AA^{-1} = I$$

- Ebenso, falls die entsprechenden Inversen existieren $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Orthogonale Matrizen

- **Orthogonale Matrix (genauer: Orthonormale Matrix):** R ist eine (quadratische) orthogonale Matrix, wenn alle Spalten orthonormal sind. Daraus folgt, dass ebenso alle Zeilen orthonormal sind, und

$$R^T R = I \quad R R^T = I \quad R^{-1} = R^T \quad (1)$$