Ludwig-Maximilians-Universität München
Department "Institut für Informatik"
Prof. Dr. Christian Böhm
Elke Achtert, Arthur Zimek

München, 17.11.2006

Informatik 1
WS 2006/07

Übungsblatt 5: Referenzen, lokale Deklarationen, vollständige Induktion

Besprechung: 27.11.–01.12.2006

Abgabe aller mit **Hausaufgabe** markierten Aufgaben bis Freitag, 24.11.2006, 18:00 Uhr

Aufgabe 5-1 *Referenzen* (Hausaufgabe)

(a) Zu jeder Kennung gibt es ein Drucker-Kontingent, das angibt, wie viele Seiten mit dieser Kennung noch gedruckt werden können. Diese Kontingente werden *Quotas* genannt. Die Datei `5-1a.sml` enthält einen Rahmen für die Verwaltung solcher Quotas mit SML. Vervollständigen Sie die Definitionen der folgenden Funktionen und geben Sie die modifizierte Datei ab.

`new_quota()`
: Liefert bei jedem Aufruf ein neues Quota, das so viele Seiten zur Verfügung stellt, wie der Wert von `initial_pages` angibt.

`reduce(quota, pages:int) : unit`
: `quota` ist ein Quota das zum Beispiel mit `new_quota()` erzeugt sein kann.
`pages` gibt an, wie viele Seiten von diesem Quota gedruckt werden sollen.
Wenn das Quota gar nicht mehr genügend Seiten zu drucken erlaubt, wird mit **`raise`** `quota_too_low` eine Ausnahme ausgelöst.
Andernfalls wird das Quota um die Anzahl der Seiten verkleinert.

`pages(quota) : int`
: `quota` ist ein Quota, das zum Beispiel mit `new_quota()` erzeugt sein kann.
Liefert die Anzahl der Seiten, die dieses Quota noch zu drucken erlaubt.

Gibt man folgendes nacheinander in SML ein, hat der letzte Ausdruck den Wert 42:

```
val q = new_quota();   reduce(q,100);   reduce(q,58);   pages(q);
```

(b) In einer neuen SML-Sitzung werden hintereinander drei Eingaben gemacht:

(i) die Datei der vorigen Teilaufgabe laden
(ii) `val q = new_quota();`
(iii) Boole'scher Ausdruck der Gestalt `TEILAUSDRUCK = TEILAUSDRUCK;` wo links und rechts vom Gleichheitszeichen syntaktisch der gleiche Teilausdruck steht.

Geben Sie in einer Datei `5-1b.txt` einen solchen Boole'schen Ausdruck an, der den Wert `false` hat. Der `TEILAUSDRUCK` kann mit den Funktionsnamen der vorigen Teilaufgabe sowie `q` und natürlichen Zahlen gebildet werden.

Aufgabe 5-2 *lokale Deklarationen* (Hausaufgabe)

Eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ hat keine reellen Lösungen, wenn ihre Diskriminante $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ negativ ist, andernfalls hat sie die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Die Datei `5-2.sml` enthält folgende SML-Implementierung dieser Formel:

```
exception keine_reellen_loesungen;

fun loesungen_quad_gleichung(p:real, q:real) : real*real  =
    if (p/2.0)*(p/2.0) - q < 0.0
    then
        raise keine_reellen_loesungen
    else
        ( ~p/2.0 + Math.sqrt((p/2.0)*(p/2.0) - q),
          ~p/2.0 - Math.sqrt((p/2.0)*(p/2.0) - q) );
```

Der Ausdruck `loesungen_quad_gleichung(0.0, ~4.0)` hat den Wert `(2.0, ~2.0)`, das Ergebnis der Funktion ist also ein Paar von Werten des Typs `real`. Solche Paare haben Sie bereits als Eckpunkte von Rechtecken kennengelernt.

Verändern Sie in Ihrer Kopie der Datei die Funktionsdefinition, so dass die Ergebnisse unverändert bleiben, aber Zwischenergebnisse an sinnvolle lokale Namen gebunden werden (keine Referenzen), so dass kein zusammengesetzter Teilausdruck mehrmals ausgewertet wird.

Aufgabe 5-3 *vollständige Induktion*

Der folgende Satz gilt offensichtlich nicht, also muss der Beweis des Satzes Fehler enthalten.
Finden Sie diese.

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: für jeden Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $x_1 = \ldots = x_n$.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

Induktionsbasis: $n = 1$.
Für jeden Vektor $(x_1) \in \mathbb{R}^1$ gilt die Behauptung trivialerweise.

Induktionsannahme: Für ein n gelte, dass für jeden Vektor $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $x_1 = \ldots = x_n$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Zu zeigen: es gilt auch für $n + 1$, dass für jeden Vektor $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $x_1 = \ldots = x_{n+1}$.

Betrachte also einen beliebigen Vektor $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Dann ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_1 = \ldots = x_n$.
Ebenso ist $(x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_2 = \ldots = x_{n+1}$.
Also ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

QED

Für diese Aufgabe ist keine Abgabe vorgesehen, aber Sie sollten sich darüber Gedanken machen, um sich auf die Übung vorzubereiten.