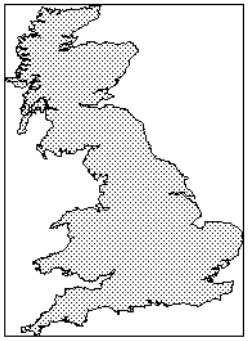
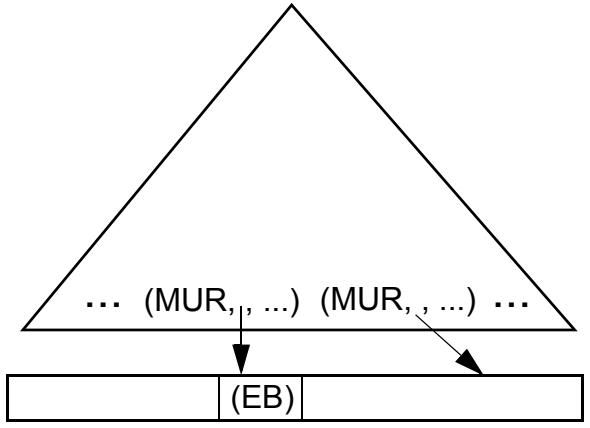
4. Räumliche Indexstrukturen

4.1 Einführung (I)

Grundlegende Ideen

- konventionelle Zugriffsstrukturen sind für die Verwaltung von geometrischen Daten schlecht geeignet
  - ⇒ *räumliche Indexstrukturen*, die die Ordnung des multidimensionalen Datenraums auf dem Sekundärspeicher möglichst gut erhalten
- Geo-Objekte variieren stark in ihrer Größe, sind aber auf Seiten fester Größe abzuspeichern
  - ⇒ Organisation von vereinfachten Geo-Objekten *(Approximationen)*, z.B. *minimal umgebende Rechtecke (MUR)*
  - ⇒ Verweis auf die exakte Beschreibung (EB) des Geo-Objektes



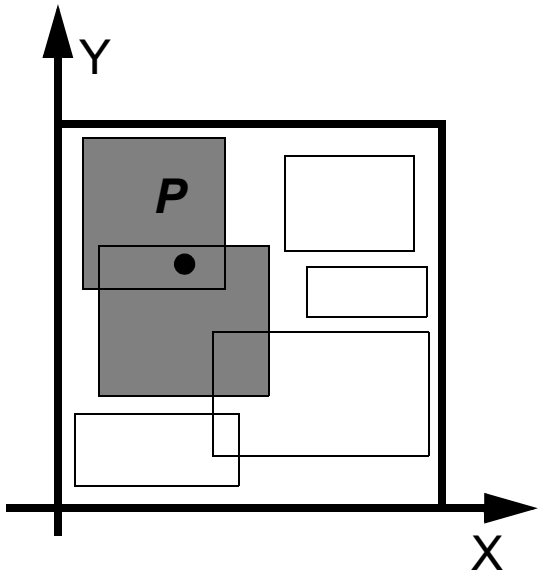


räumliche Indexstruktur

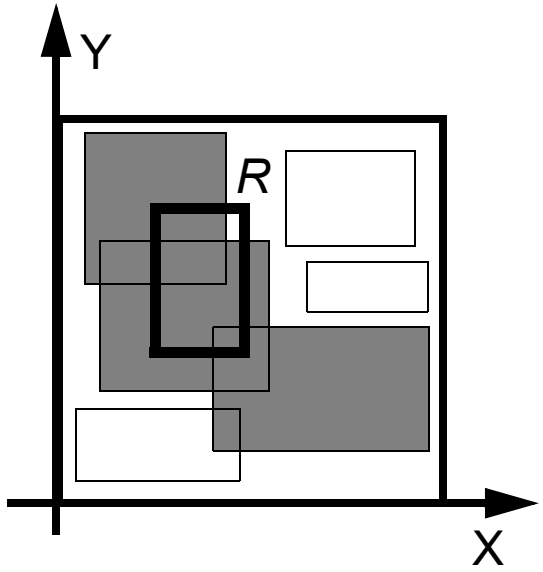
4.1 Einführung (II)

Zu unterstützende Anfragen

- Gegeben ein Anfragepunkt *P* bzw. ein Anfragerechteck *R*
- *Punkt-Anfrage*: Finde die Geo-Objekte Obj mit P $\in$ Obj.MUR.
- *Fenster-Anfrage:* Finde die Geo-Objekte Obj mit R $\cap$ Obj.MUR $\neq \emptyset$.



Punkt-Anfrage

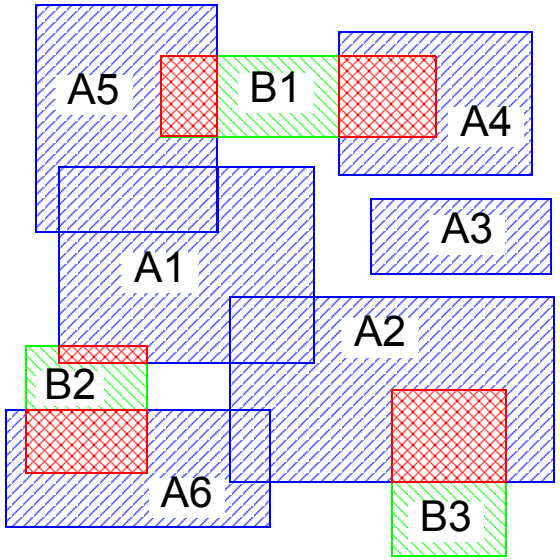


Fenster-Anfrage

4.1 Einführung (III)

Zu unterstützende Anfragen (Forts.)

- Gegeben zwei Mengen minimal umgebender Rechtecke
  $M_1 = \{MUR_{1,1}, MUR_{1,2}, \ldots, MUR_{1,m}\}$ und $M_2 = \{MUR_{2,1}, MUR_{2,2}, \ldots, MUR_{2,n}\}$
- *Spatial-Join*: Berechne die Menge
  $\{ (MUR_1, MUR_2) \mid MUR_1 \in M_1, MUR_2 \in M_2 \text{ und } MUR_1 \cap MUR_2 \neq \emptyset \}$.
  $\Rightarrow$ auch andere räumliche Prädikate möglich



Spatial-Join

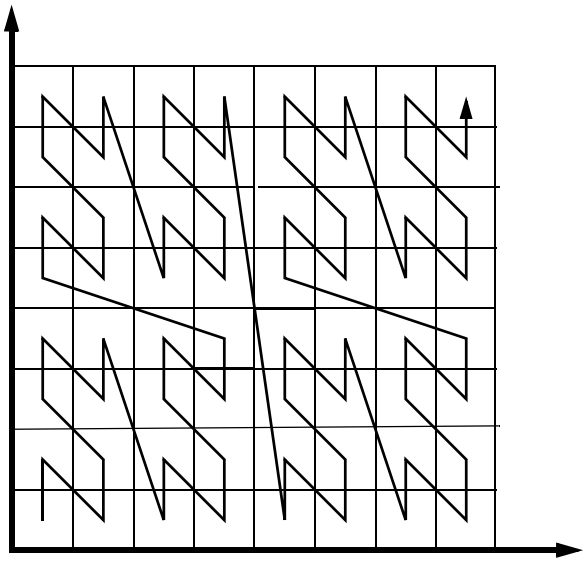
Antwortmenge:

(A5, B1)
(A4, B1)
(A1, B2)
(A6, B2)
(A2, B3)

4.1 Prinzipielle Techniken (I)

Einbettung in eindimensionalen Raum

- vollständige Zerlegung des Datenraums in gleichförmige disjunkte Zellen
- Definition einer linearen Ordnung auf diesen Zellen (z.B. Z-Ordnung)
- Organisation der Zellen über eine konventionelle (eindimensionale) Indexstruktur (z.B. B-Baum)



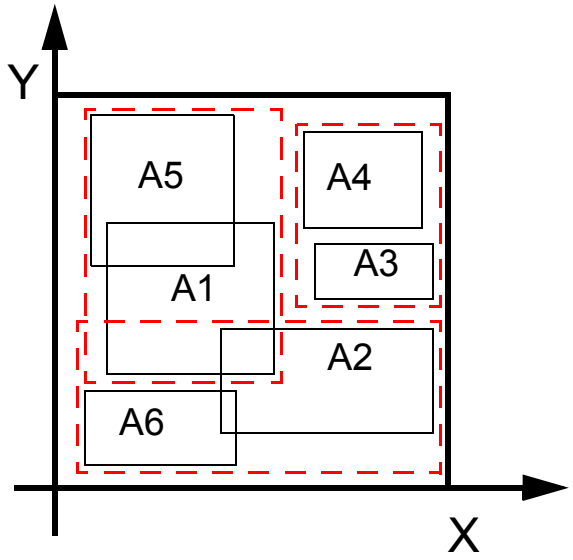
21	23	29	31	53	55	61	63
20	22	28	30	52	54	60	62
17	19	25	27	49	51	57	59
16	18	24	26	48	50	56	58
5	7	13	15	37	39	45	47
4	6	12	14	36	38	44	46
1	3	9	11	33	35	41	43
0	2	8	10	32	34	40	42

Z-Ordnung

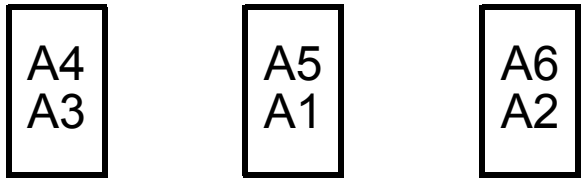
4.1 Prinzipielle Techniken (II)

Organisation des 2D-Raums (Gruppierung und Speicherung in MURs)

- Aufteilung der Rechtecke (MURs) in disjunkte Gruppen, wobei jede Gruppe exklusiv in einer Seite abgespeichert wird



3 Gruppen (Seiten):



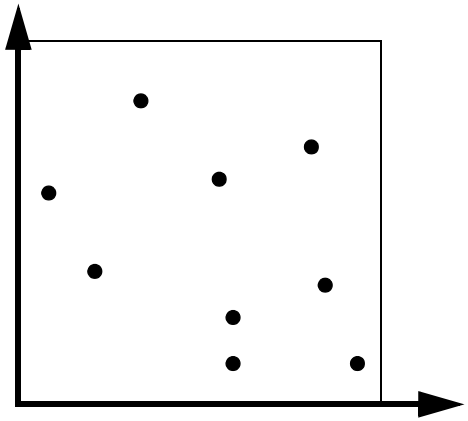
- Im Directory MURs der im Teilbaum enthaltenen MURs abspeichern.
- Split des Datenraums je nach abgespeicherten Daten.

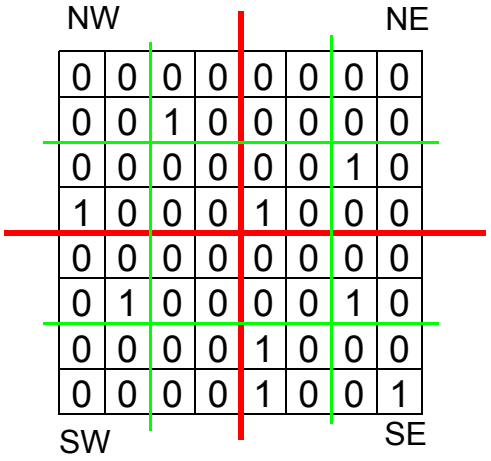
  $\Rightarrow$ R-Baum

4.1 Prinzipielle Techniken (III)

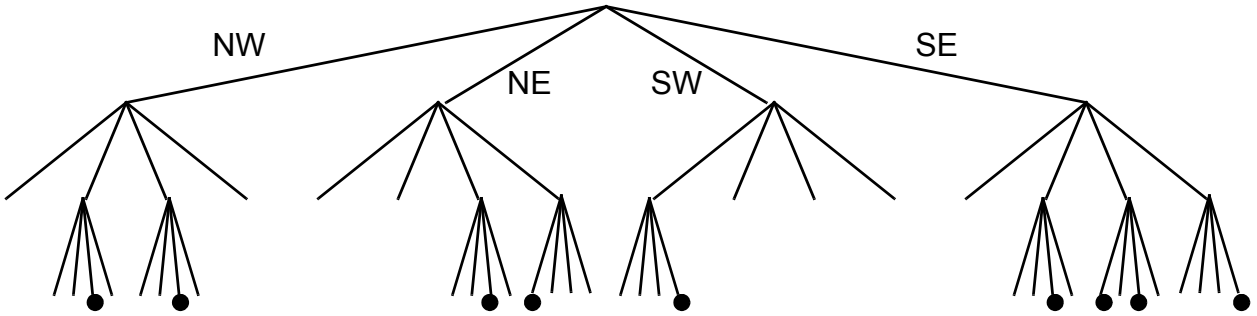
Organisation des 2D-Raums (hierarchische Zerlegung des Raums)

- Split des Datenraums immer in der Mitte einer Dimension
- Punkte = Pixel in dem gerasterten Datenraum



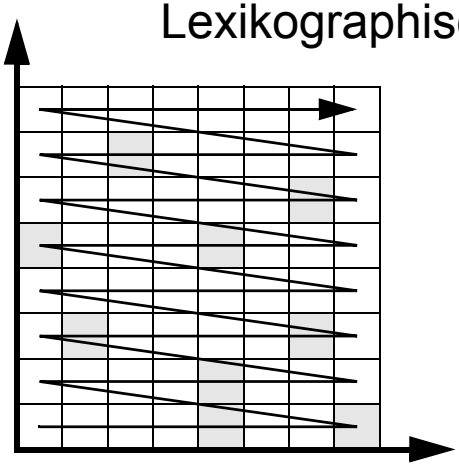


⇒ Quadtrees



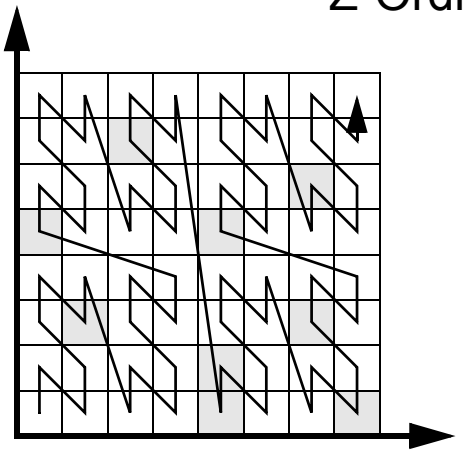
4.2 Raumfüllende Kurven

Lexikographische Ordnung



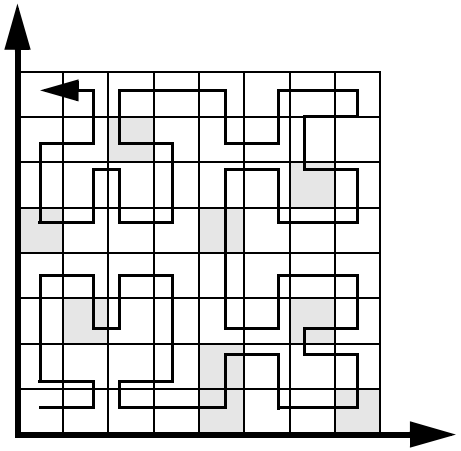
56	57	58	59	60	61	62	63
48	49	50	51	52	53	54	55
40	41	42	43	44	45	46	47
32	33	34	35	36	37	38	39
24	25	26	27	28	29	30	31
16	17	18	19	20	21	22	23
8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7

Z-Ordnung



21	23	29	31	53	55	61	63
20	22	28	30	52	54	60	62
17	19	25	27	49	51	57	59
16	18	24	26	48	50	56	58
5	7	13	15	37	39	45	47
4	6	12	14	36	38	44	46
1	3	9	11	33	35	41	43
0	2	8	10	32	34	40	42

Hilbert-Kurve

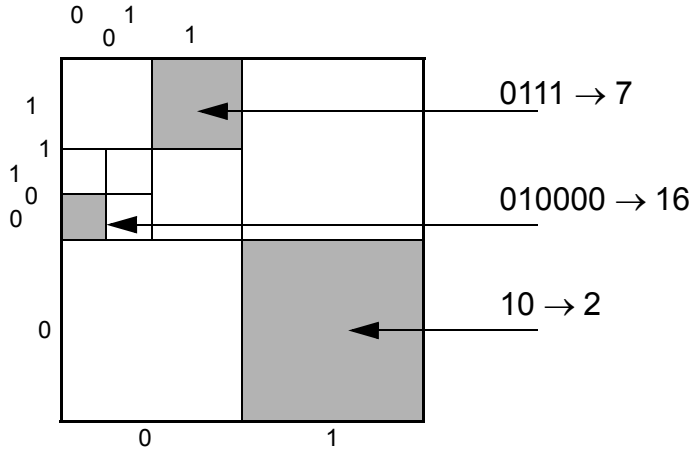


63	62	49	48	47	44	43	42
60	61	50	51	46	45	40	41
59	56	55	52	33	34	39	38
58	57	54	53	32	35	36	37
5	6	9	10	31	28	27	26
4	7	8	11	30	29	24	25
3	2	13	12	17	18	23	22
0	1	14	15	16	19	20	21

- Z-Ordnung erhält die räumliche Nähe relativ gut
- Z-Ordnung ist effizient berechenbar

4.2 Z-Ordnung (I)

Codierung von Zellen



abwechselnd rechts/links und oben/unten partitionieren

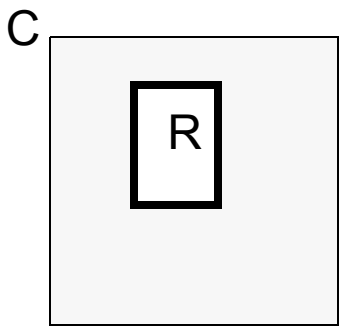
Z-Werte

- *Level* eines Codes = Anzahl der Bits
- *Z-Wert* = (Dezimalwert des Codes, Level)

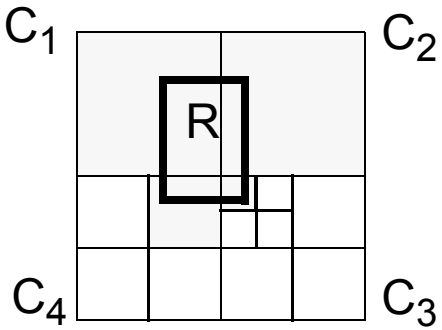
4.2 Z-Ordnung (II)

Codierung von Rechtecken (MURs)

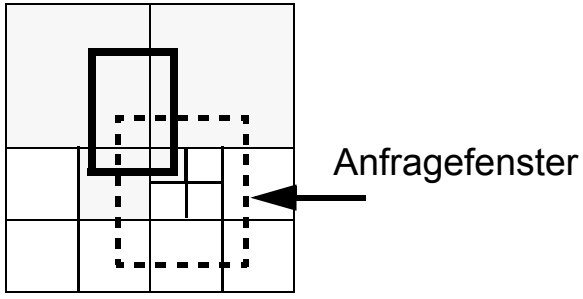
- durch die minimal umgebende Zelle
  - ⇒ Probleme mit Rechtecken, die auf den Schnittlinien liegen
- durch mehrere Zellen
  - ⇒ bessere Approximation des Rechtecks
  - ⇒ redundante Abspeicherung
  - ⇒ redundante Antworten



Codierung von R
durch eine Zelle



Codierung von R
durch mehrere Zellen



Anfrage liefert mehrmals
die gleiche Antwort

4.2 Z-Ordnung (III)

Abbildung auf B^+-Baum

- Lineare Ordnung zur Verwaltung im B^+-Baum
  - Seien (c_1, l_1) und (c_2, l_2) zwei Z-Werte und sei $l = \min \{l_1, l_2\}$.
  - Dann ist die Ordnungsrelation $\leq_Z$ wie folgt definiert:

$$(c_1, l_1) \leq (c_2, l_2) \text{ falls } c_1 \text{ div } 2^{l_1 - l} \leq c_2 \text{ div } 2^{l_2 - l}$$

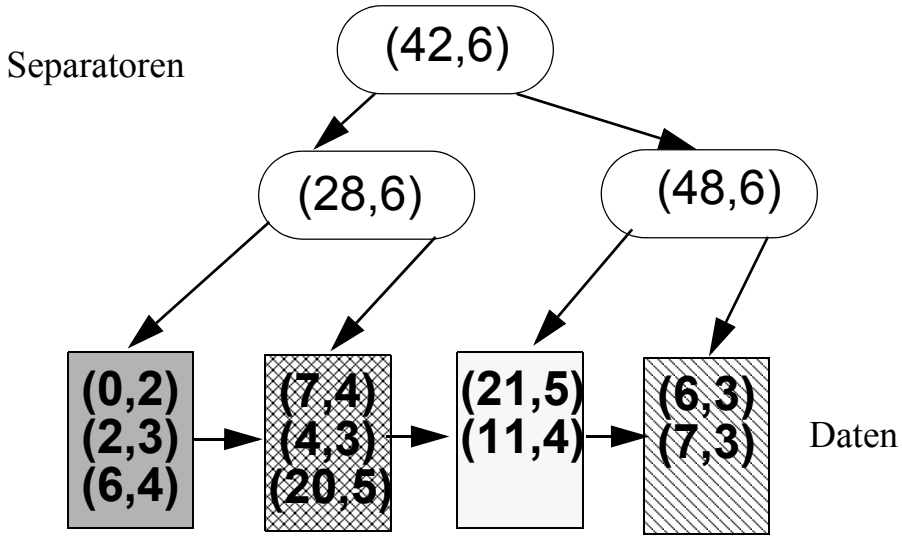
  - Beispiele:

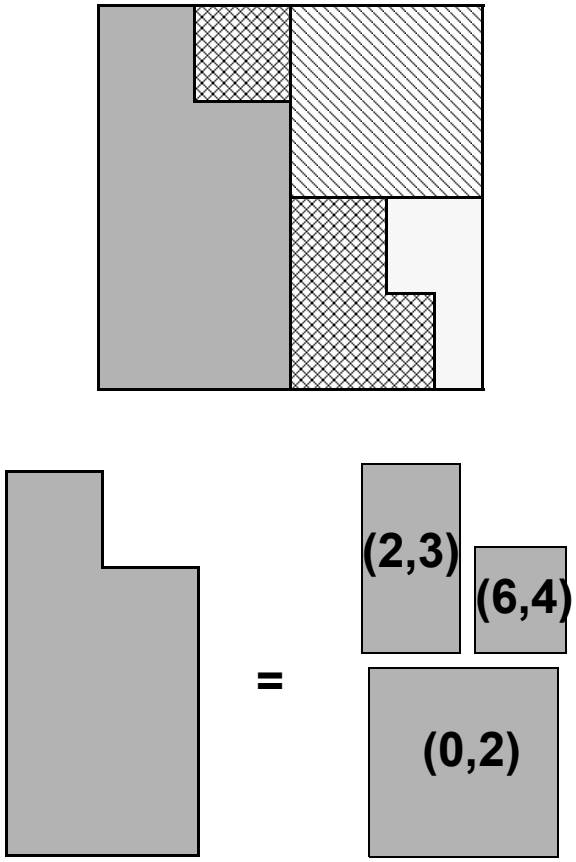
    $(1,2) \leq_Z (3,2)$, $(3,4) \leq_Z (3,2)$, $(1,2) \leq_Z (10,4)$

- Wenn ein Blatt des B+-Baums überläuft, dann Split der Seite in 2 Seiten gemäß B+-Baum Strategie.

4.2 Z-Ordnung (IV)

Beispiel





(0,2) ≤ (28,6) ≤ (7,4) ≤ (42,6)

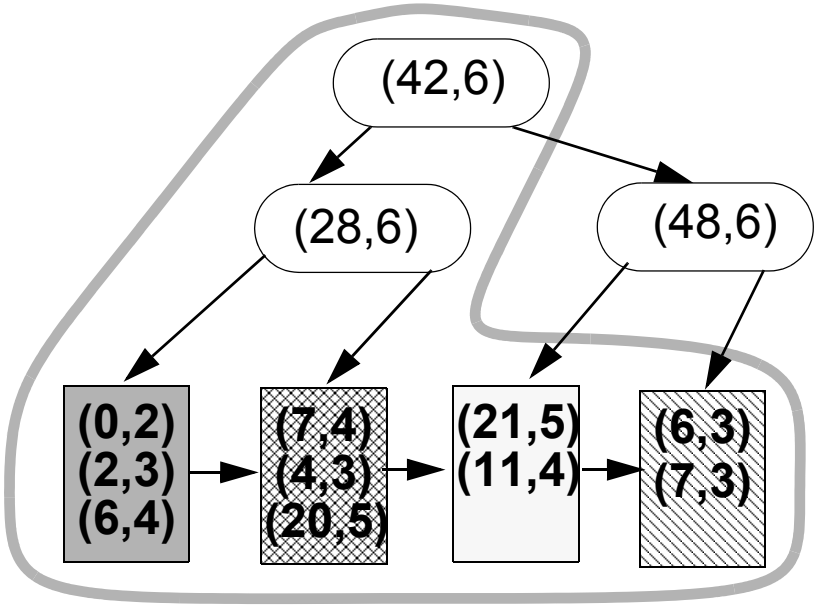
(2,3) ≤ (28,6) ≤ (4,3) ≤ (42,6)

(6,4) ≤ (28,6) ≤ (20,5) ≤ (42,6)

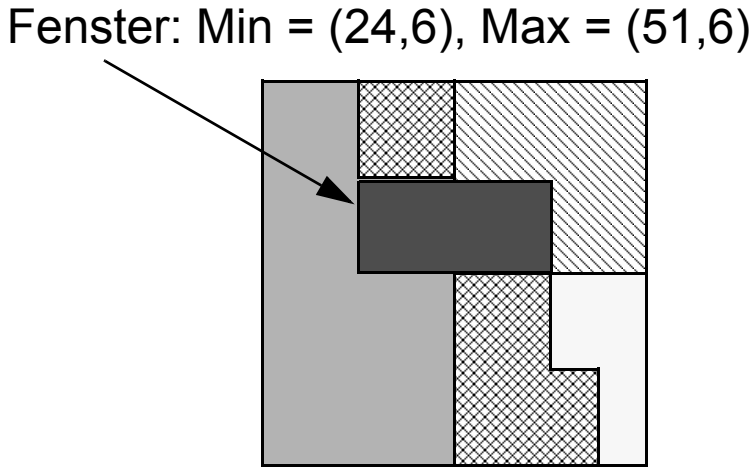
4.2 Z-Ordnung (V)

Fenster-Anfrage (1. Ansatz)

- Benutze den “gewöhnlichen” Algorithmus für Bereichsanfragen im B^+-Baum:
  - Suche für den kleinsten Z-Wert des Windows (entspricht dem linken unteren Eckpunkt) das zugehörige Blatt im B^+-Baum
  - Durchlaufe sequentiell die Blätter bis ein Z-Wert größer als der größte Z-Wert im Suchrechteck gefunden wurde



Suchbereich

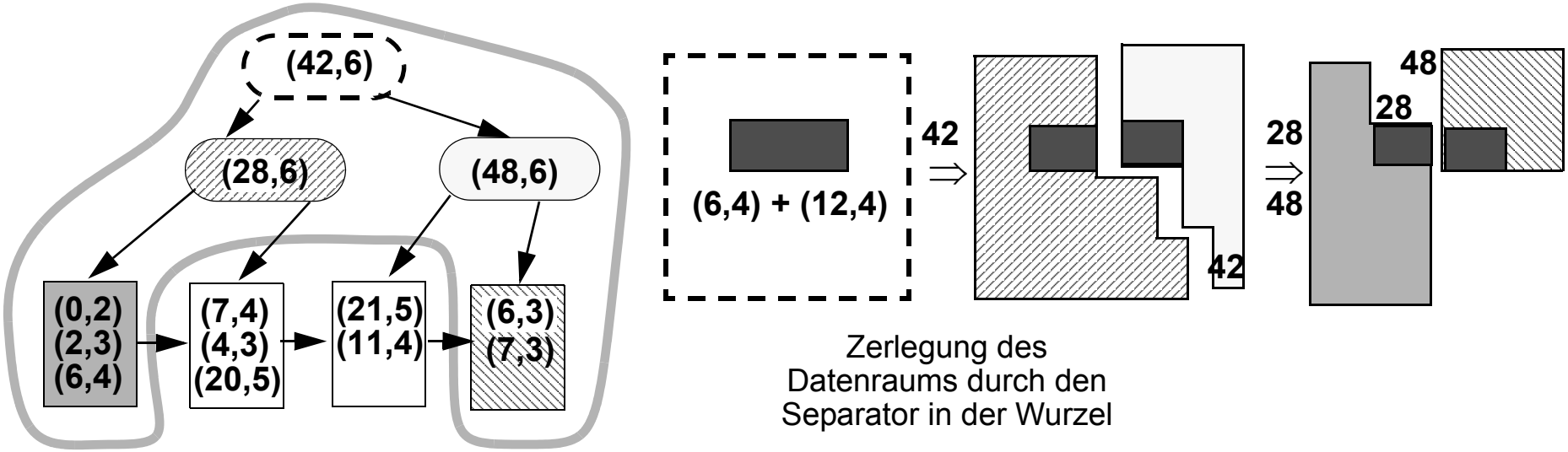


  - ineffizient, da der Suchbereich verglichen mit dem Fenster sehr groß ist

4.2 Z-Ordnung (VI)

Fenster-Anfrage (2. Ansatz)

- Jeder Knoten des B^+-Baums repräsentiert einen Bereich des Datenraums
- In jedem Knoten wird durch die Separatoren der zugehörige Bereich des Knotens in Teilbereiche zerlegt
- *Idee:* Verwende zur Beantwortung der Anfrage in einem Teilbaum nur den Teil des Windows, der den Bereich des Teilbaums schneidet



Zerlegung des Datenraums durch den Separator in der Wurzel

- – Mehraufwand für das Durchlaufen der Indexseiten im B^+-Baum (Separatoren)
- – Teilbereiche sind nicht notwendigerweise Rechtecke
- \+ Zugriff nur auf die tatsächlich relevanten Datenseiten

4.3 R-Bäume (I)

Idee

- basiert auf der Technik überlappender Seitenregionen
- verallgemeinert die Idee des B+-Baums auf den 2-dimensionalen Raum

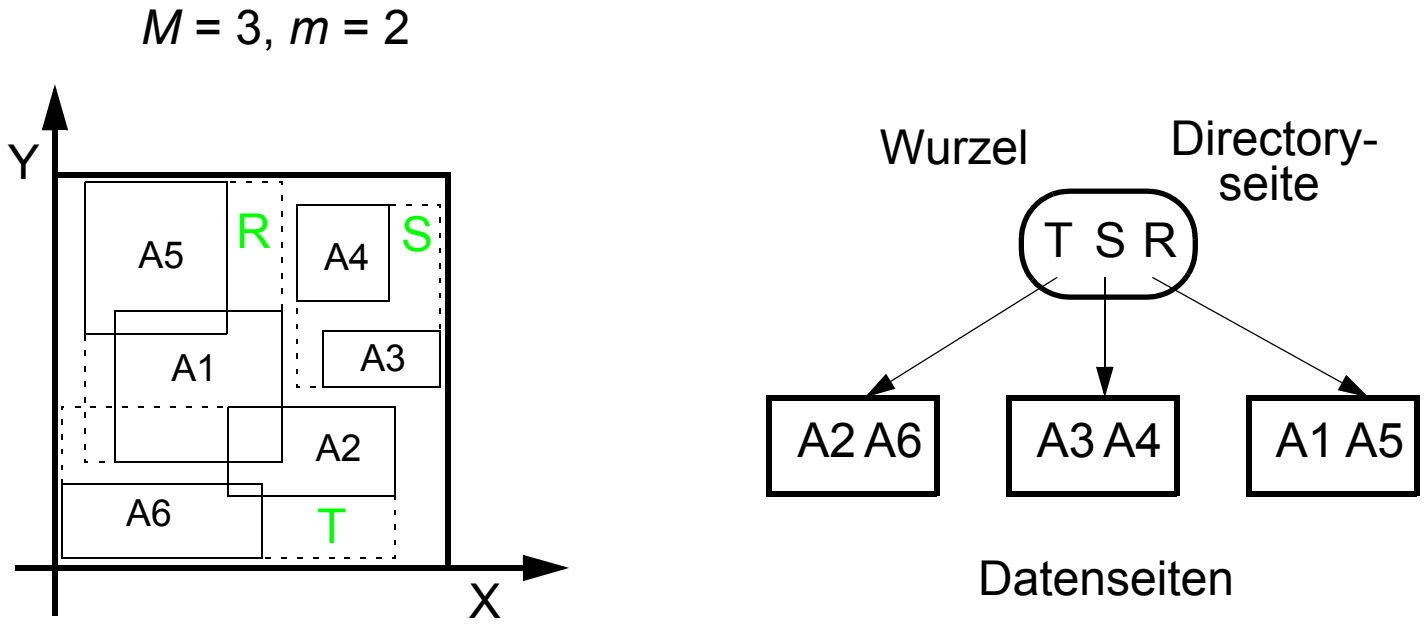
Definition

Ein *R-Baum* mit ganzzahligen Parametern m und M, $2 \leq m \leq \lceil M/2 \rceil$, organisiert eine Menge von Rechtecken in einem Baum mit folgenden Eigenschaften:

- In einer *Datenseite* werden Einträge der Form (Rectangle, Verweis auf die exakte Beschreibung, weitere Attribute) verwaltet.
- In einer *Directoryseite* werden Indexeinträge der Form (Rectangle, Subtree^) gehalten. Hier bezeichnet Rectangle ein MUR und Subtree^ eine Referenz auf einen Teilbaum.
- Jedes Rechteck eines Indexeintrags überdeckt die Datenrechtecke (MURs) des zugehörigen Teilbaums.
- Alle Datenseiten sind Blätter des Baums. Der Baum ist vollständig balanciert, d.h. alle Pfadlängen von der Wurzel zu einem Blatt sind gleich.
- Jede Seite besitzt maximal M Einträge und, mit Ausnahme der Wurzel, mindestens m Einträge.

4.3 R-Bäume (II)

Beispiel



Höhe eines R-Baums

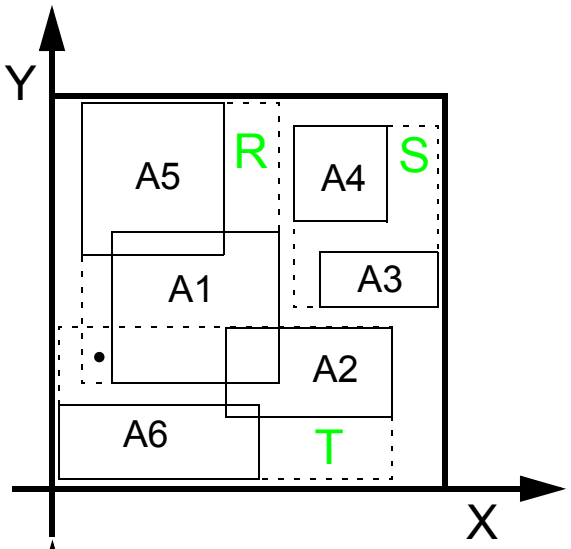
- Ist N die Anzahl der gespeicherten Datensätze, so gilt für die Höhe h des R-Baumes:

$$h \leq \lceil \log_m N \rceil + 1$$

- Die Höhe eines R-Baums ist also O(log N).

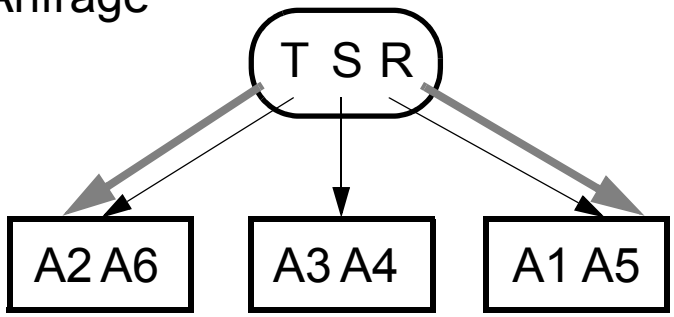
4.3 R-Bäume (III)

Anfragen

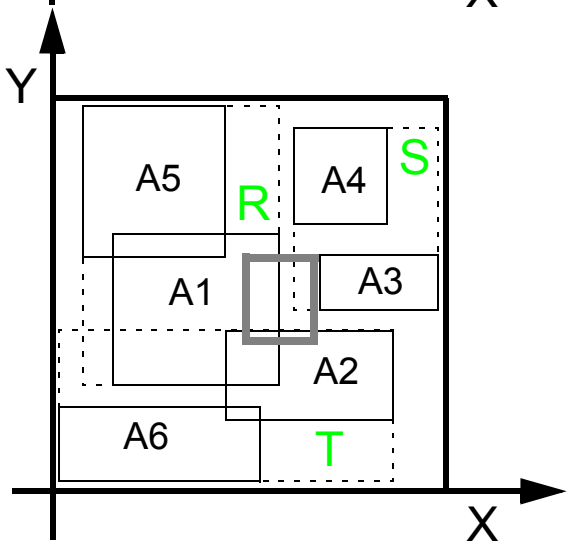


zu verfolgende Pfade

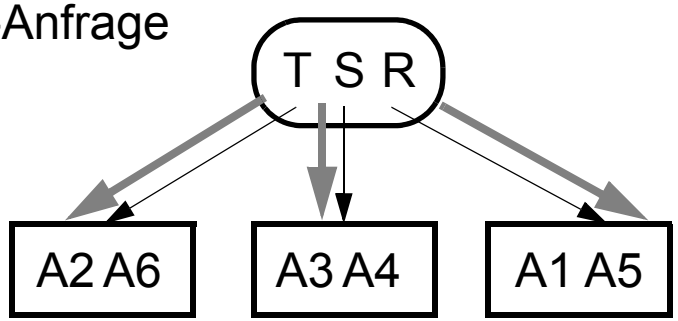
Punkt-Anfrage



Antwort:
[]



Fenster-Anfrage



Antwort:
[A1, A2]

4.3 R-Bäume (IV)

Punkt-Anfrage

```
PointQuery (Page, Point);
  FOR ALL Entry ∈ Page DO
    IF Point IN Entry.Rectangle THEN
      IF Page = DataPage THEN
        Write (Entry.Rectangle)
      ELSE
        PointQuery (Entry.Subtree^, Point);
```

Fenster-Anfrage

```
Window Query (Page, Window);
  FOR ALL Entry ∈ Page DO
    IF Window INTERSECTS Entry.Rectangle THEN
      IF Page = DataPage THEN
        Write (Entry.Rectangle)
      ELSE
        WindowQuery (Entry.Subtree^, Window);
```

- Erster Aufruf jeweils mit Page = Seite der Wurzel
- Gibt es eine Überlappung der Directory-Rechtecke im Bereich der Anfrage, verzweigt die Suche in mehrere Pfade.

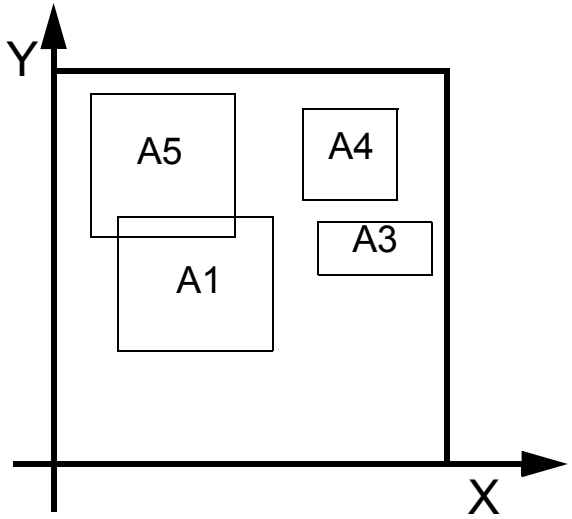
4.3 R-Bäume (V)

Optimierungsziele

- geringe Überlappung der Seitenregionen
- Seitenregionen mit geringem Flächeninhalt
  - $\Rightarrow$ geringe Überdeckung von totem Raum
- Seitenregionen mit geringem Umfang

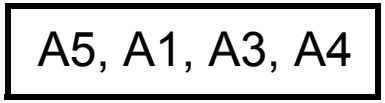
Aufbau

M = 3, *m* = 2



Start:  leere Datenseite (= Wurzel)

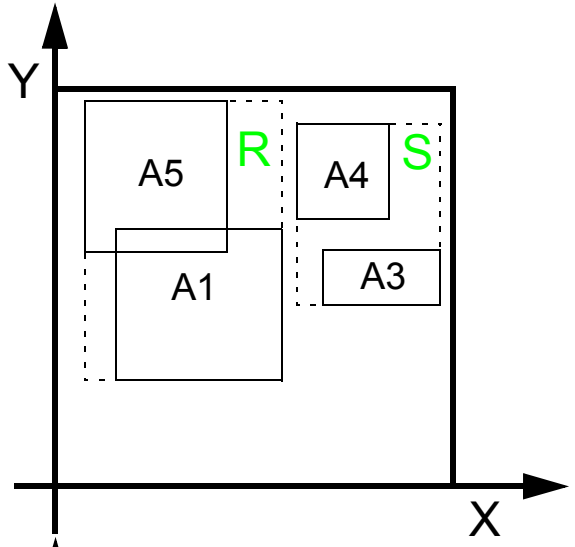
Einfügen von: A5, A1, A3, A4



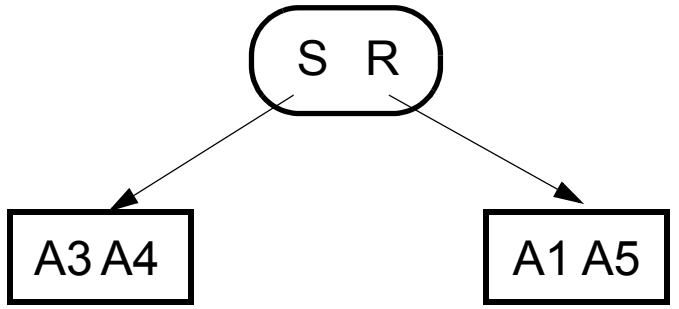
* (Überlauf)

4.3 R-Bäume (VI)

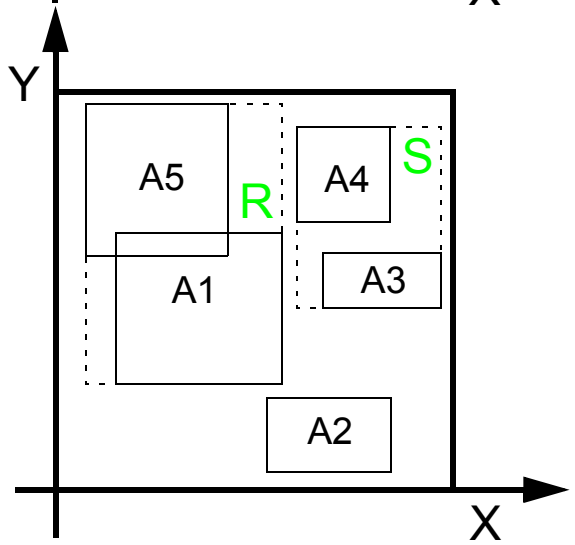
Aufbau (Fortsetzung)

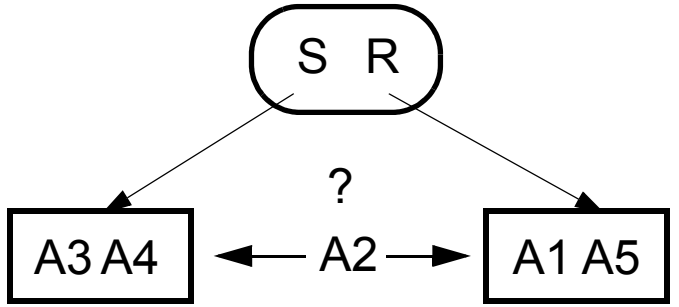


⇒ Split in 2 Seiten



Frage: Wie wird aufgeteilt? (*Splitstrategie*)





Frage: Wo wird eingefügt? (*Einfügestrategie*)

4.3 Einfügestrategie für R-Bäume

Das Rechteck R ist in einen R-Baum einzufügen

Fälle

- Fall 1: R fällt vollständig in genau ein Directory-Rechteck D
  - $\Rightarrow$ Einfügen in Teilbaum von D
- Fall 2: R fällt vollständig in mehrere Directory-Rechtecke D_1, ... , D_n
  - $\Rightarrow$ Einfügen in Teilbaum von D_i, das die geringste Fläche aufweist
- Fall 3: R fällt vollständig in kein Directory-Rechteck
  - $\Rightarrow$ Einfügen in Teilbaum von D, das den geringsten Flächenzuwachs erfährt (in Zweifelsfällen: ... , das die geringste Fläche hat)
  - $\Rightarrow$ D muß entsprechend vergrößert werden

Strategie des R*-Baums

- Fall 3.a: Die Directoryseite D verweist auf Directoryseiten

  $\Rightarrow$ Einfügen in Teilbaum des D, das den geringsten Flächenzuwachs erfährt
- Fall 3.b: Die Directoryseite D verweist auf Datenseiten

  $\Rightarrow$ Einfügen in Teilbaum des D, das den kleinsten Zuwachs an Überlappung bringt

4.3 Splitstrategien für R-Bäume (I)

Der Knoten K läuft mit $|K| = M+1$ über:

$\Rightarrow$ Aufteilung auf zwei Knoten K_1 und K_2, sodaß $|K_1| \geq m$ und $|K_2| \geq m$

Erschöpfender Algorithmus

- Suche unter den $O(2^M)$ Möglichkeiten die "beste" aus $\Rightarrow$ zu aufwendig ($M \approx 200$)

Quadratischer Algorithmus

- Wähle das Paar von Rechtecken R_1 und R_2 mit dem größten Wert für den "toten Raum" im MUR, falls R_1 und R_2 in denselben Knoten K_i kämen.

  $d(R_1, R_2) := \text{Fläche}(\text{MUR}(R_1 \cup R_2)) - \text{Fläche}(R_1) - \text{Fläche}(R_2)$

  Setze $K_1 := \{R_1\}$ und $K_2 := \{R_2\}$.
- Wiederhole den folgenden Schritt bis zu STOP:
  - wenn alle R_i zugeteilt sind: STOP
  - wenn alle restlichen R_i benötigt werden, um den kleineren Knoten minimal zu füllen: teile sie alle zu und STOP
  - sonst: wähle das nächste R_i und teile es dem Knoten zu, dessen MUR den kleineren Flächenzuwachs erfährt. Im Zweifelsfall bevorzuge den K_i mit kleinerer Fläche des MUR bzw. mit weniger Einträgen.

4.3 Splitstrategien für R-Bäume (II)

Linearer Algorithmus

- Der lineare Algorithmus ist identisch mit dem quadratischen Algorithmus bis auf die Auswahl des initialen Paars (R_1, R_2).
- Wähle das Paar von Rechtecken R_1 und R_2 mit dem "größten Abstand", genauer:
  - Suche für jede Dimension das Rechteck mit dem kleinsten Maximalwert und das Rechteck mit dem grössten Minimalwert (*maximaler Abstand*).
  - Normalisiere den maximalen Abstand jeder Dimension, indem er durch die Summe der Ausdehnungen der R_i in der Dimension dividiert wird (*setze den maximalen Abstand der Rechtecke ins Verhältnis zur ihrer Ausdehnung*).
  - Wähle das Paar von Rechtecken mit dem größten normalisierten Abstand bzgl. aller Dimensionen. Setze $K_1 := \{R_1\}$ und $K_2 := \{R_2\}$.
- Dieser Algorithmus ist linear in der Zahl der Rechtecke M und in der Zahl der Dimensionen d.

4.3 Splitstrategien für R-Bäume (III)

Idee der R*-Baum Splitstrategie

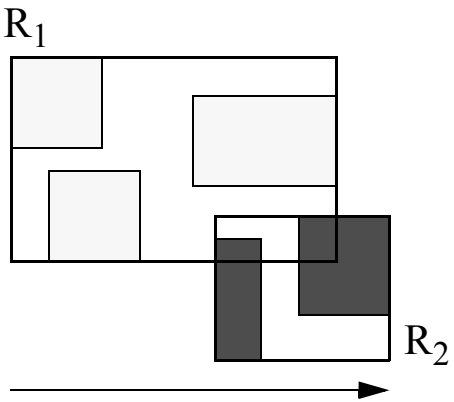
- sortiere die Rechtecke in jeder Dimension nach beiden Eckpunkten und betrachte nur Teilmengen nach dieser Ordnung benachbarter Rechtecke
- Laufzeitkomplexität ist $O(d * M * \log M)$ für d Dimensionen und M Rechtecke

Bestimmung der Splitdimension

- Sortiere für jede Dimension die Rechtecke gemäß beider Extremwerte
- Für jede Dimension:
  - Für jede der beiden Sortierungen werden $M-2m+2$ Aufteilungen der $M+1$ Rechtecke bestimmt, so daß die 1. Gruppe der j-ten Aufteilung die ersten $m-1+j$ Rechtecke und die 2. Gruppe die übrigen Rechtecke enthält
  - UG sei die Summe aus dem Umfang der beiden MURs R_1 und R_2 um die Rechtecke der beiden Gruppen
  - US sei die Summe der UG aller berechneten Aufteilungen

$\Rightarrow$ Es wird die Dimension mit dem geringsten US als Splitdimension gewählt.

4.3 Splitstrategien für R-Bäume (IV)



Sortierachse, nach niedrigstem Wert

2. Aufteilung
(bei M = 4, m =2)

UG =
Umfang von R_1 +
Umfang von R_2

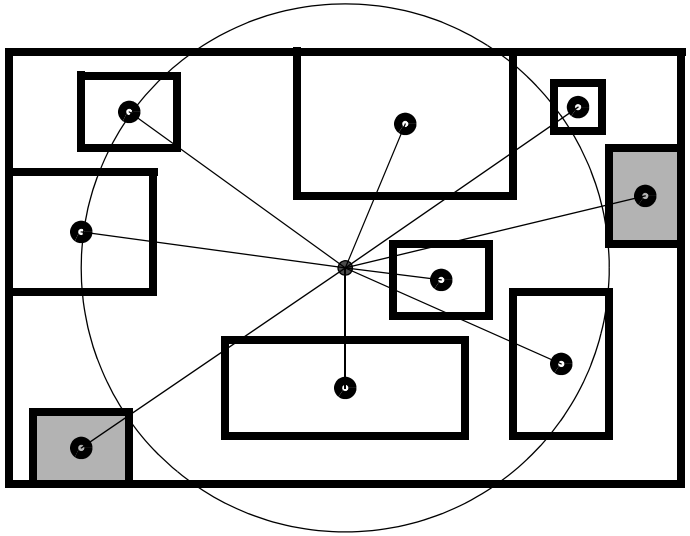
Bestimmung der Aufteilung

- Es wird die Aufteilung der gewählten Splitdimension genommen, bei der R_1 und R_2 die geringste Überlappung haben.
- In Zweifelsfällen wird die Aufteilung genommen, bei der R_1 und R_2 die geringste Überdeckung von totem Raum besitzen.

$\Rightarrow$ Die besten Resultate hat bei Experimenten $m = 0{,}4 * M$ ergeben

4.3 Vermeidung von Splits (R*-Baum)

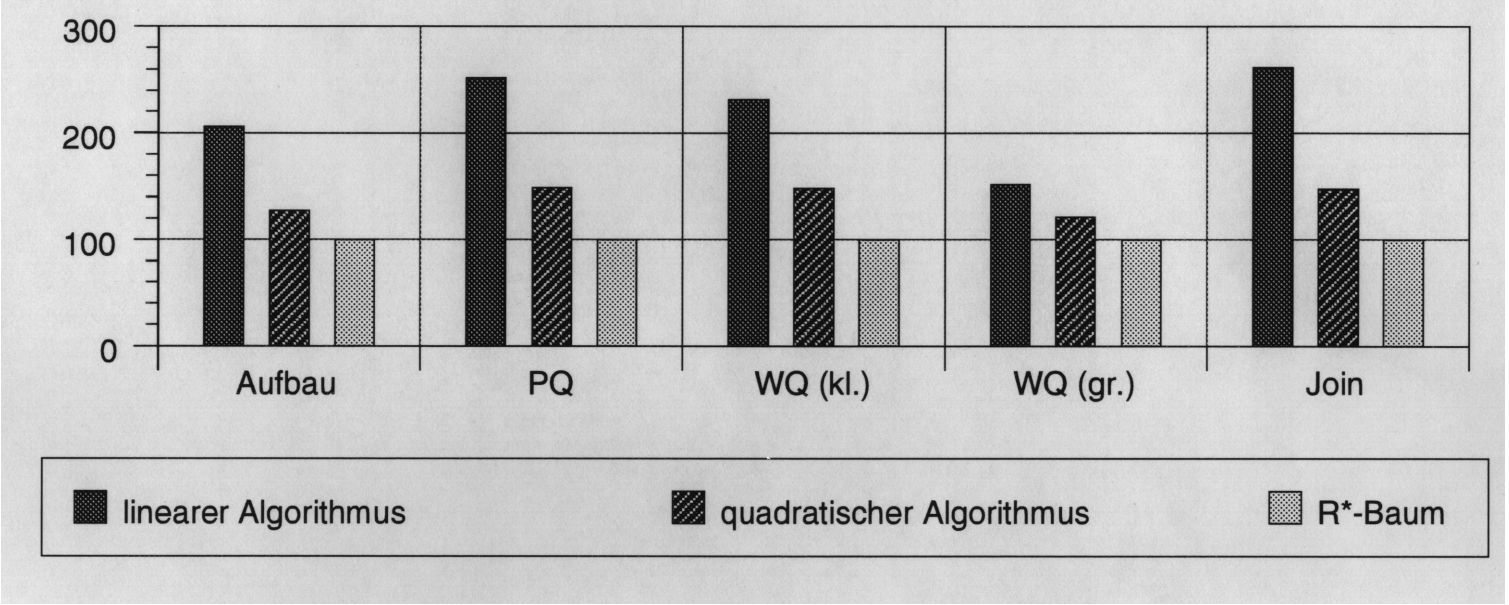
- Bevor eine Seite einem Split unterzogen wird, werden die am weitesten vom Zentrum der Seitenregion entfernt liegenden Einträge gelöscht und noch einmal in den R*-Baum eingefügt *(Forced Reinsert)*



- Ziele
  - Vermeiden von Splits (nicht immer möglich) $\Rightarrow$ bessere Speicherplatzausnutzung
  - Anpassung des R*-Baums an die aktuelle Datenverteilung (mehr Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Einfügungen)
- Erfahrung: Anteil der zu löschenden und wieder einzufügenden Rechtecke = 30%

4.3 Leistungsvergleich von R-Bäumen

[Beckmann, Kriegel, Schneider, Seeger 1990]



- Messung der Anzahl der Seitenzugriffe für Aufbau, Point Queries (PQ), kleine und grosse Window Queries (WQ) und Spatial Joins
- R*-Baum auf 100 normalisiert

$\Rightarrow$ R*-Baum ist immer am besten in Bezug auf Anzahl der Seitenzugriffe

4.3 R-Bäume: Zusammenfassung

- Technik der überlappenden Seitenregionen
  - Rechtecke im Directory können sich überlappen
  - Punkt-Anfrage nicht auf einen Pfad beschränkt
- Rechtecke, die Objekte approximieren (MURs), werden genau einmal in der Struktur gespeichert
- Relativ einfach zu implementieren
- Einfüge- und Splitstrategien basieren auf heuristischen Überlegungen
- Optimierungsgesichtspunkte:
  - geringe Überlappung der Seitenregionen
  - Seitenregionen mit geringem Flächeninhalt / geringe Überdeckung von totem Raum
  - Seitenregionen mit geringem Umfang
  - Speicherplatzausnutzung
- R*-Bäume sind die Variante mit dem besten Leistungsverhalten

4.3 Exakte Beschreibungen (I)

Aufgabe

- effiziente Verwaltung und Manipulation der exakten Beschreibungen
- exakte Beschreibung eines Geo-Objekts durch Linienzug oder Polygon

Umfeld

- räumlich benachbarte Objekte werden häufig gemeinsam in einer Anfrage angefordert
- der Zugriff auf mehrere physisch benachbarte Seiten ist effizienter als der mehrfache Zugriff auf einzelne (weit voneinander entfernte) Seiten
- einzelne Objekte können sich über mehrere Seiten erstrecken

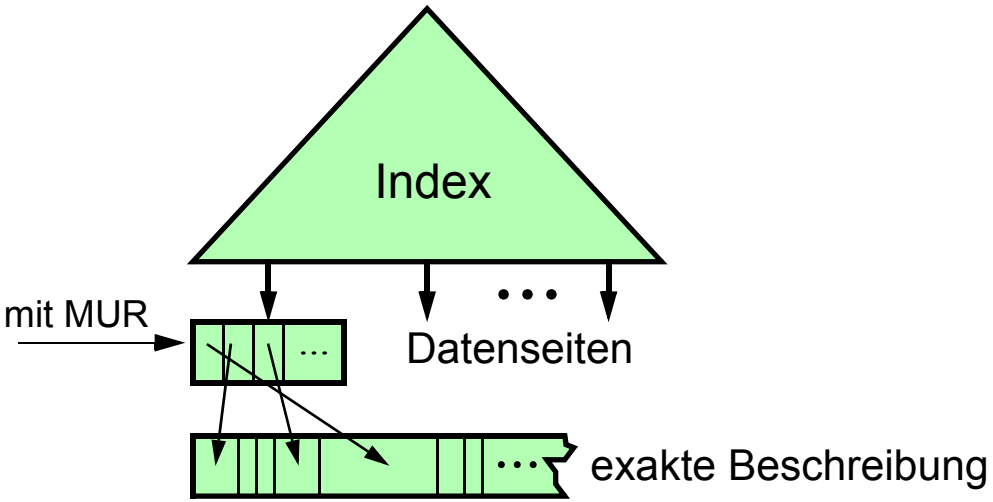
Ansätze zur Verwaltung der exakten Beschreibungen

- Sekundärorganisation
- Primärorganisation
- Clusterorganisation

4.3 Exakte Beschreibungen (II)

Sekundärorganisation

- Räumliche Indexstruktur verwaltet Approximationen (MUR) und Verweise auf exakte Beschreibung (z.B. Polygon)
- Exakte Beschreibung wird unabhängig von räumlicher Indexstruktur verwaltet

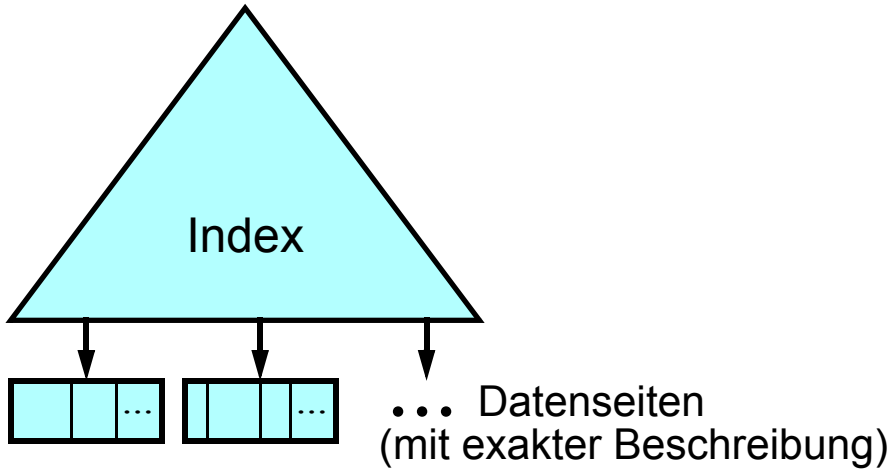


+ einfach
+ Trennung zwischen Approximation und exakter Geometrie
– keine räumliche Clusterbildung der exakten Beschreibung
  (Einfügezeitpunkt oder andere Aspekte bestimmen Ort der Speicherung)

4.3 Exakte Beschreibungen (III)

Primärorganisation

- Räumliche Indexstruktur verwaltet Approximationen *und* exakte Beschreibungen in den Datenseiten

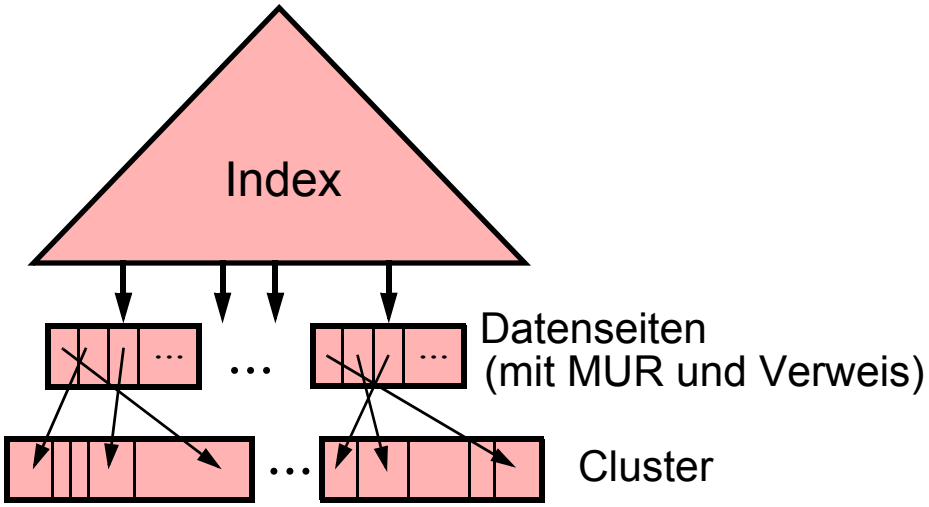


- \+ räumliche Clusterbildung auf Approximation und exakter Geometrie
- – jede Datenseite enthält u.U. deutlich weniger Objekte
- – geringer Umfang der Clusterbildung (nur innerhalb einer Seite)
- – keine Trennung zwischen Approximation und exakter Geometrie
- – Überlaufbehandlung für Objekte, die größer als eine Datenseite sind

4.3 Exakte Beschreibungen (IV)

Clusterorganisation

- Die exakte Beschreibung der Objekte, deren MUR in einer Datenseite gespeichert sind, werden auf physisch benachbarten Seiten abgelegt (*Cluster*).
- Die Seiten eines Cluster werden vollständig oder in relevanten Teilmengen eingelesen.



\+ räumliche Clusterbildung auf Approximation und exakter Geometrie

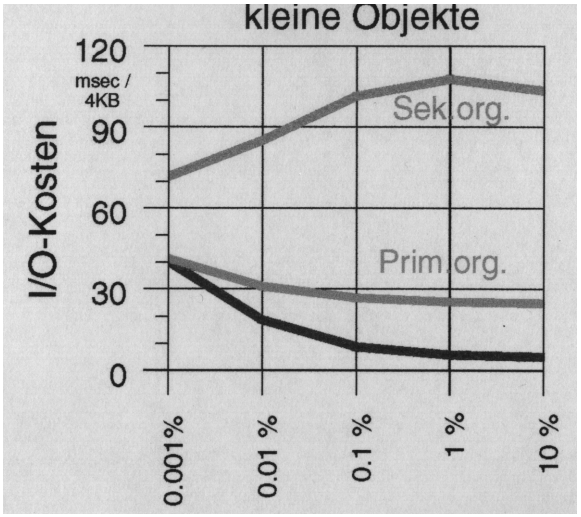
\+ Trennung zwischen Approximation und exakter Geometrie

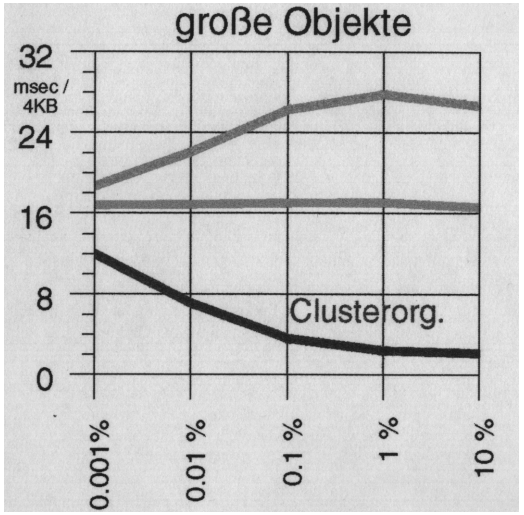
\+ Clusterbildung für Objekte mehrerer Seiten

– schlechtere Speicherplatzausnutzung als bei Primärorganisation

4.3 Leistungsvergleich

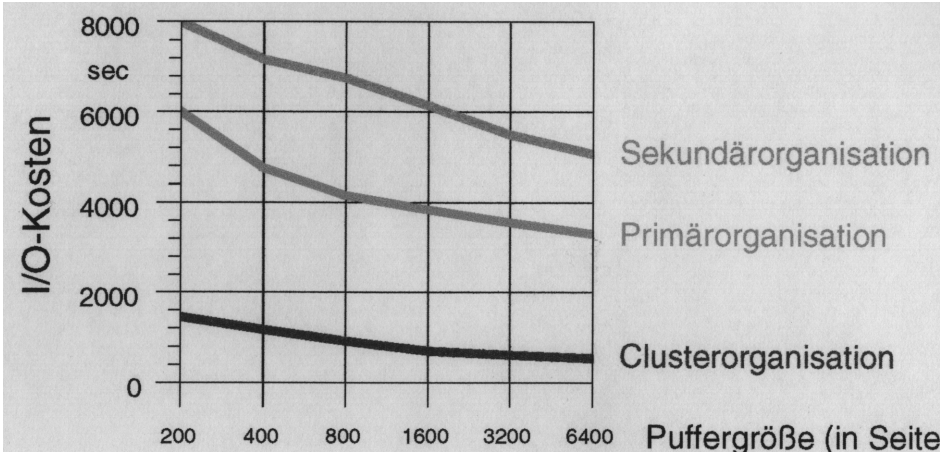
- Fenster-Anfragen





Fläche des Anfragefensters in % der Fläche des Datenraums

- Spatial Join



4.4 Quadtrees

Überblick

- Klasse räumlicher Indexstrukturen, die den Datenraum rekursiv in 4 gleich große Zellen unterteilen (*Quadranten NW, NE, SW, SE*)
- Verwaltung von Punkten, Kurven, Flächen usw.
- häufig verwendet in kommerziellen Geo-Informationssystemen
- Weitere Anwendungen: Komprimierung von Rasterbildern, Bildverarbeitung, Computergrafik

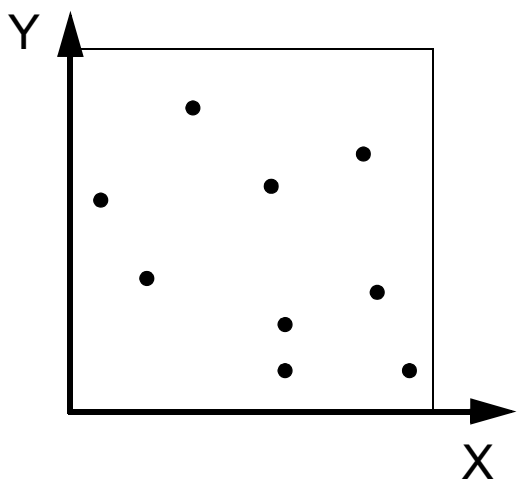
Literatur

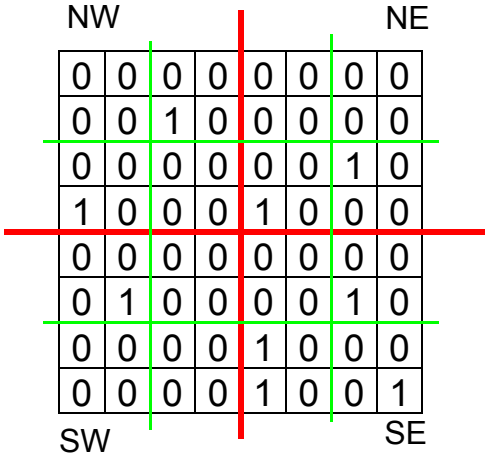
- Samet: *'The Design and Analysis of Spatial Data Structures',* Addison-Wesley, 1990
- Samet: *'Applications of Spatial Data Structures: Computer Graphics, Image Processing, and GIS'*, Addison-Wesley, 1990

4.4 MX-Quadtrees (I)

MatriX Quadtree

- Verwaltung 2-dimensionaler Punkte
- Punkte als 1-Elemente in einer quadratischen Matrix mit Wertebereich {0,1}
- rekursive Aufteilung des Datenraums in die Quadranten NW, NE, SW und SE
- feste Auflösung des Datenraums in $2^p \cdot 2^p$ Gitterzellen



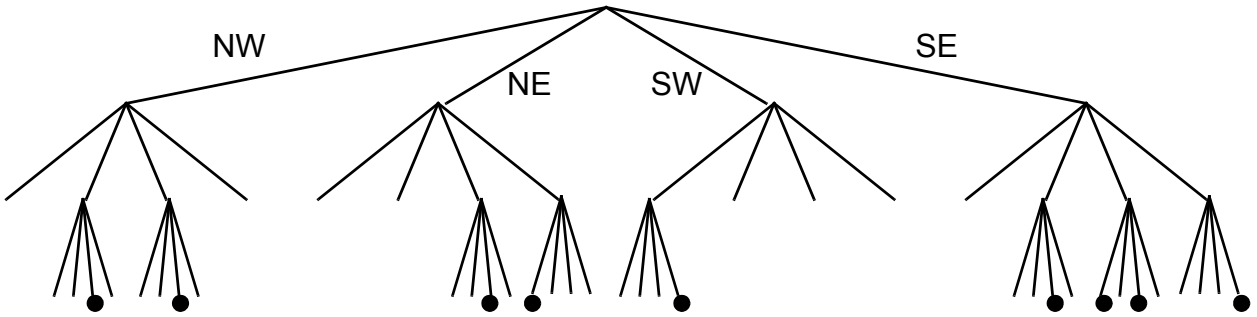


4.4 MX-Quadtrees (II)

Baumstruktur

- *Interne Knoten* besitzen 4 Verweise auf Söhne (NW, NE, SW, SE)
- *Blattknoten* enthalten 0 oder 1 Datensatz
- Datensätze befinden sich alle auf demselben Level
- Für jeden internen Knoten gibt es (mindestens) einen Teilbaum mit Datensatz
- Datenraum mit $2^p \cdot 2^p$ Gitterzellen:

  p = Höhe des MX-Quadtrees (Abstand eines Datensatzes zur Wurzel)



$\Rightarrow$ in jeder Gitterzelle kann sich nur ein Punkt befinden

4.4 MX-Quadtrees (III)

Gegeben

- Breite des Gitters $2 \cdot W$
- Zentrum des Gitters (W,W)

Gesucht

- Quadrant eines Punkts (X,Y)

Algorithmus

```
Quadrant PROCEDURE MX_Compare (X, Y, W);
   RETURN (
      IF X < W THEN
         IF Y < W THEN 'SW'
         ELSE 'NW'
      ELSE IF Y < W THEN 'SE'
               ELSE 'NE');
END MX_Compare;
```

4.4 MX-Quadtrees (IV)

Algorithmus Punktanfrage

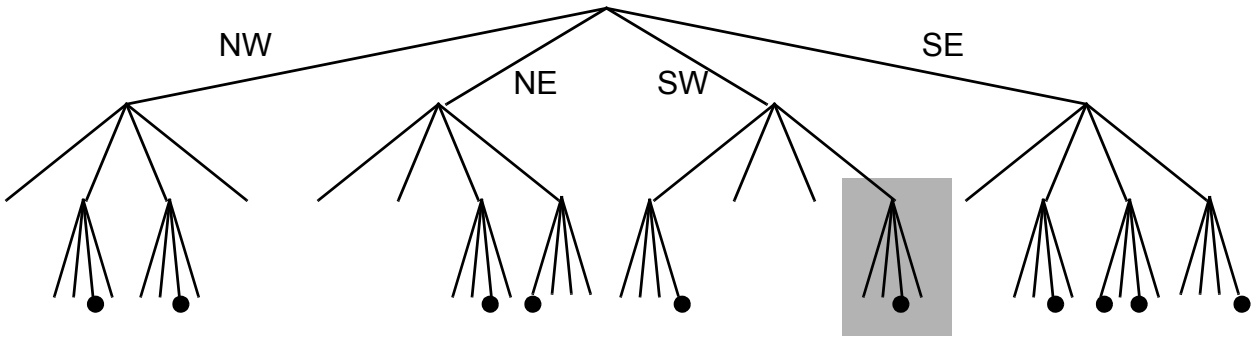
```
Data PROCEDURE Point_Query (X, Y, W, Node);
    Q:=MX_Compare(X,Y,W);
    Q-Son:= Reference to Quadrant Q of Node;
    IF NULL(Q-Son) THEN RETURN NULL
    ELSE
        IF W = 1 THEN RETURN Data of Q-Son of Node
        ELSE Point_Query(X MOD W,Y MOD W, W/2,Q-Son);
END Point_Query;
```

- Erster Aufruf mit Node = Wurzel des MX-Quadtrees und $W = 2^{p-1}$ des MX-Quadtrees
- Punktanfrage ist auf einen Pfad des MX-Quadtrees beschränkt

4.4 MX-Quadtrees (V)

Einfügen

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1



Eigenschaften

- falls in dem Blatt schon ein Datensatz vorhanden ist, wird er durch neuen Datensatz überschrieben
- Einfügereihenfolge hat keinen Einfluß auf Datenstruktur

4.4 MX-Quadtrees (VI)

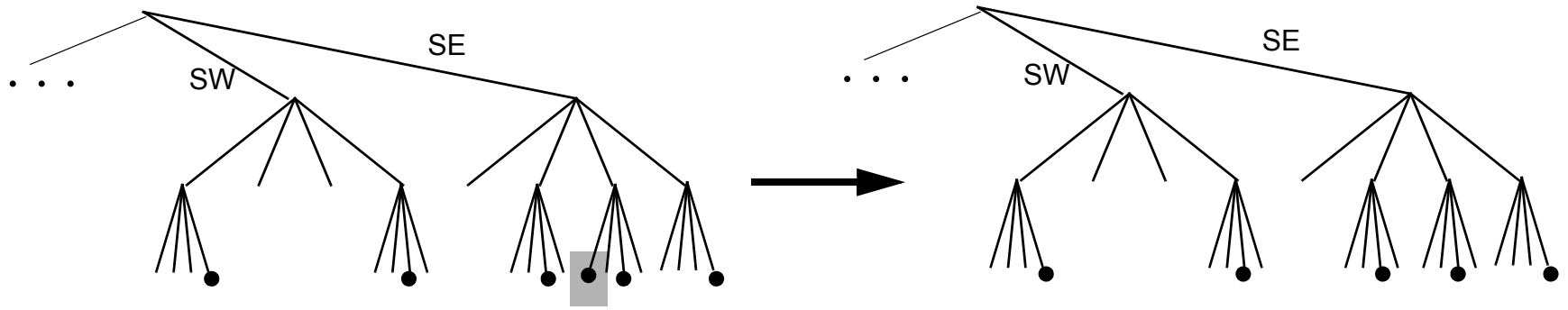
Algorithmus Einfügen

```
PROCEDURE MX_Insert (X, Y, Data, W, Node);
   IF W = 1 THEN
      Q:=MX_Compare(X,Y,W);
      Q-Son:= Reference to Quadrant Q of Node;
      IF NULL(Q-Son) THEN Create NW, NE, SW and SE-Son of Node;
      Insert (X,Y,Data) into Q-Son of Node;
   ELSE
      Q:=MX_Compare(X,Y,W);
      Q-Son:= Reference to Quadrant Q of Node;
      IF NULL(Q-Son) THEN Create NW, NE, SW and SE-Son of Node;
      MX_Insert(X MOD W,Y MOD W,Data,W/2,Q-Son)
END MX_Insert;
```

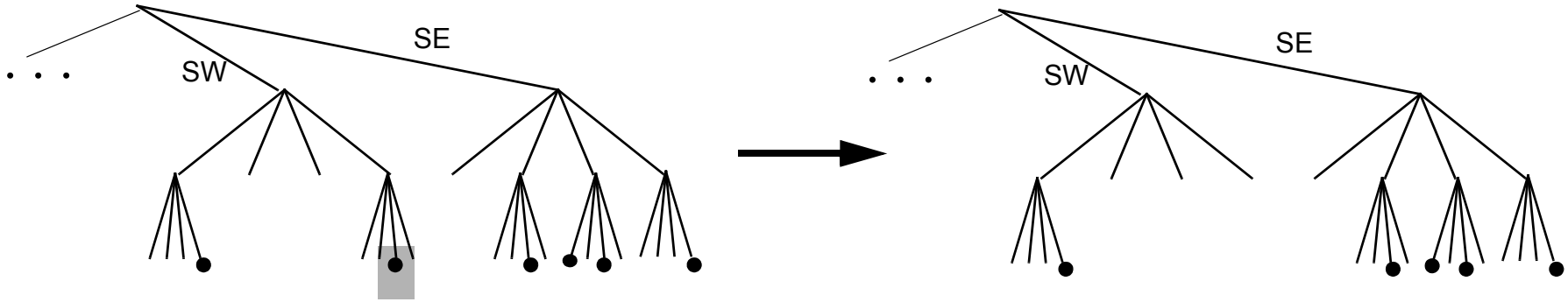
- Erster Aufruf mit Node = Wurzel des MX-Quadtrees und $W = 2^{p-1}$ des MX-Quadtrees
- Einfügen ist auf einen Pfad des MX-Quadtrees (plus die Brüder) beschränkt

4.4 MX-Quadtrees (VII)

Löschen



Löschen mit Kollabieren

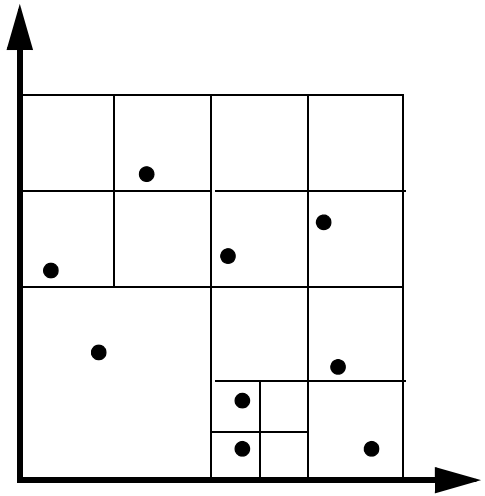


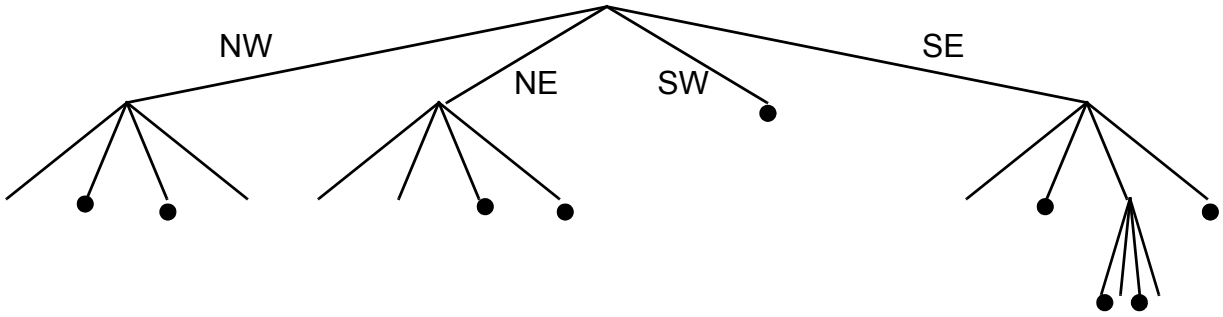
- Löschen ist auf die Knoten eines Pfades und die jeweiligen Brüder beschränkt

4.4 PR-Quadtrees (I)

Point Region Quadtree

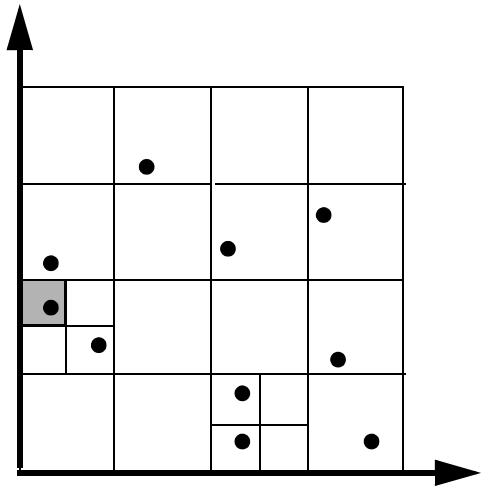
- variable Auflösung des Datenraums
- Komprimierung eines internen Knotens eines MX-Quadtrees, falls im Teilbaum nur ein Datensatz vorhanden
- Dann wird der Datensatz direkt in dem internen Knoten abgespeichert und dessen vier Kinderknoten werden freigegeben.
- Jeder interne Knoten besitzt mindestens zwei Punkte in den darunterliegenden Teilbäumen

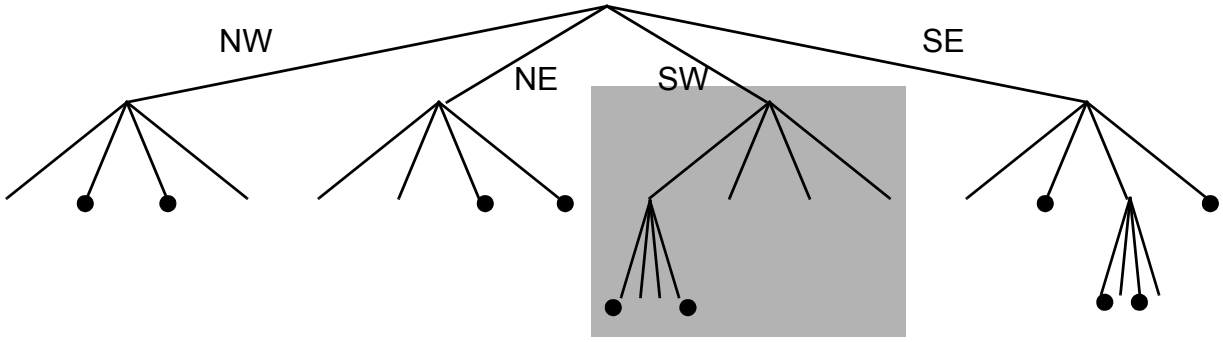




4.4 PR-Quadtrees (II)

Einfügen





- Suche den Einfügeknoten *N*
- Falls *N* ein leerer Knoten, so füge den Datensatz in *N* ein
- Andernfalls teile den Datenraum des Teilbaums von *N* solange rekursiv auf, bis die beiden Punkte in unterschiedlichen Quadranten (Knoten) liegen

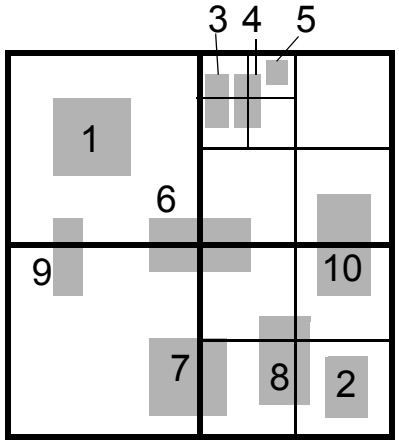
Eigenschaften

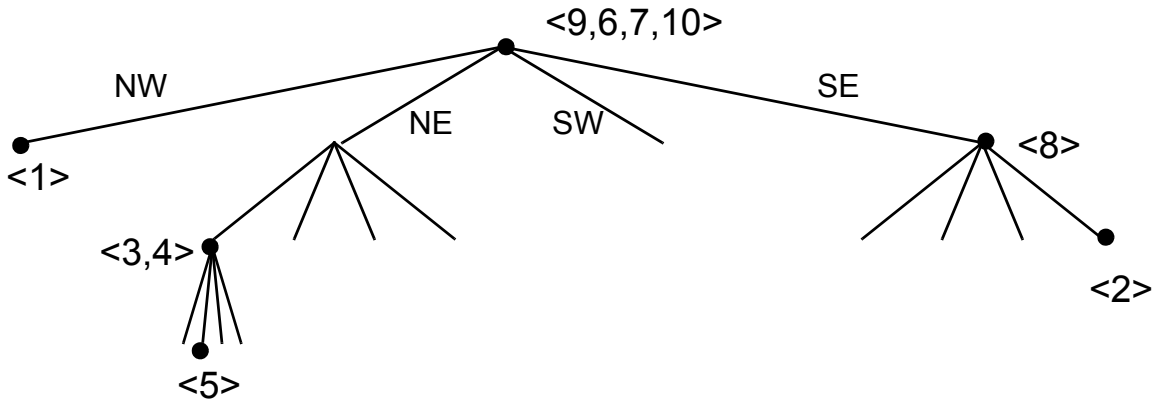
- Einfügereihenfolge hat keinen Einfluß auf Datenstruktur
- Entstammen die Punkte einem Datenraum mit $2^p \cdot 2^p$ Gitterzellen, so kann der Speicherplatzbedarf für n Punkte $O(n \cdot p)$ betragen.

4.4 Quadtrees für Rechtecke (I)

Idee 1

- Rechtecke (MURs) werden durch die minimal umgebende Zelle eines Quadtrees repräsentiert
- Speichere zu jedem Knoten eine Liste von Rechtecken, die vollständig in der dem Knoten zugeordneten Region liegen, aber nicht in der Region eines darunterliegenden Kinderknotens
- Beispiel:





$\Rightarrow$ unbeschränkte Länge der Listen (schwierige Organisation auf Sekundärspeicher)

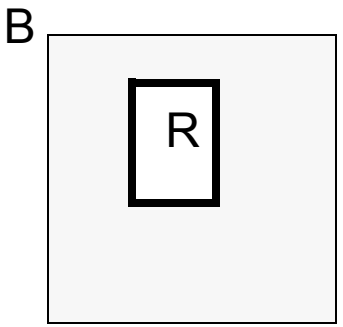
$\Rightarrow$ viele Geo-Objekte, die nicht die Anfrage erfüllen, aber deren minimal umgebende Quadtree-Zellen die Anfrage erfüllen *(schlechte Approximation)*

4.4 Quadtrees für Rechtecke (II)

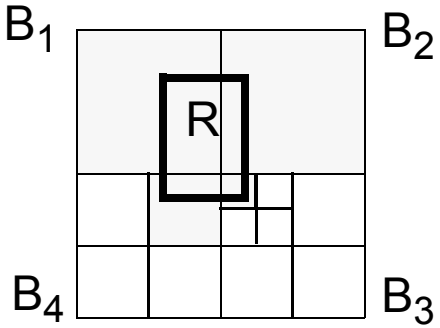
Idee 2

- repräsentiere ein Rechteck durch mehrere Quadtree-Zellen
- Repräsentation eines Rechtecks R:

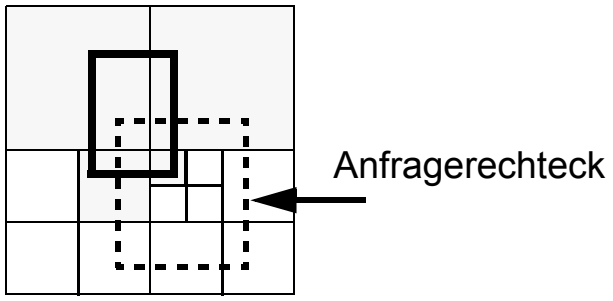
  B sei die zu R gehörige minimal umgebende Quadtree-Zelle; B_1, B_2, B_3 und B_4 seien die Zellen der darunterliegenden Kinderknoten. Dann repräsentiere R durch die Zellen des Quadtrees, die $R \cap B_i$, $1 \leq i \leq 4$, minimal umgeben.



Repräsentation durch eine Zelle



Repräsentation durch mehrere Zellen



Anfrage liefert mehrmals die gleiche Antwort

+ bessere Approximation des Rechtecks R, d.h. weniger Fehltreffer
– die gleiche Antwort wird ggf. mehrfach gefunden

4.4 Quadtrees für Polygone

Ziel

- Abspeicherung von Linien und Polygonen direkt in einem Quadtree
- Clustering nicht nur der MURs, sondern der EBs selbst
- Minimierung des Speicherplatzbedarfs

PM-Quadtrees

- Rekursive Aufteilung der Menge von Eckpunkten / Kanten eines Polygons in Teilmengen, die durch eine Datenstruktur fester Grösse repräsentiert werden können
- Diese Datenstrukturen werden in einem Blattknoten des Quadtrees abgespeichert

Varianten

- Repräsentierung der Eckpunkte: PM_1-Quadtrees, PM_2-Quadtrees, PM_3-Quadtrees
- Repräsentierung der Kanten: PMR-Quadtrees

4.4 PM_1-Quadtree (I)

Idee

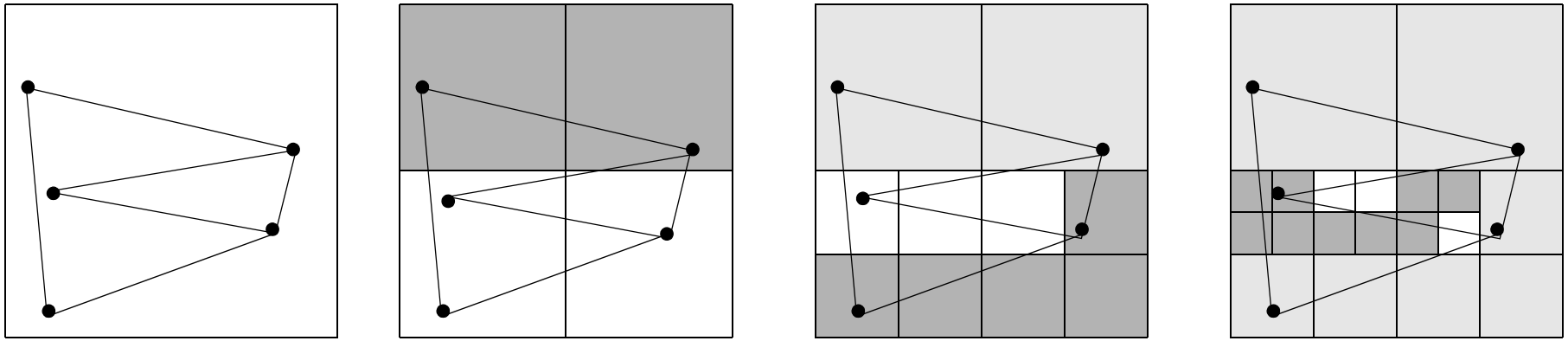
- Abspeicherung der Polygone durch ihre Eckpunkte, ohne dabei eine Approximation durch minimal umgebende Quadtree-Zellen oder minimal umgebende Rechtecke zu benutzen

Baumstruktur

- Eine *Blattzelle* ist eine Zelle (Quadrant) des Gitters, die durch ein Blatt des Quadtrees repräsentiert wird
- Höchstens ein Eckpunkt eines Polygons liegt in der Zelle eines Blattknotens
- Falls ein Blattknoten *B* des PM_1-Quadtrees einen Eckpunkt *E* enthält, so müssen alle Kanten in *B* den Punkt *E* als Eckpunkt besitzen
- Falls eine Blattzelle *B* keinen Eckpunkt enthält, so darf durch *B* nur eine Kante führen

4.4 PM_1-Quadtree (II)

Beispiel



- – Leistung hängt wesentlich von der Nähe zwischen Punkten und Kanten ab (Kanten in einem Eckpunkt mit kleinem Winkel $\Rightarrow$ schlechtes Leistungsverhalten)
- \+ sehr einfache Datenstruktur für Blattknoten

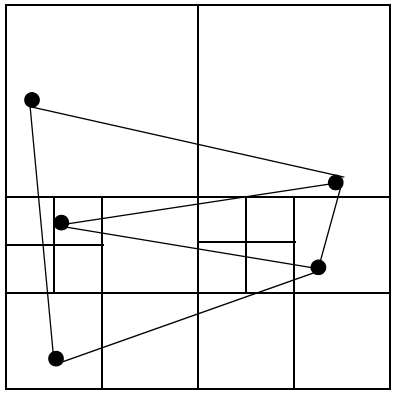
4.4 PM_2-Quadtree

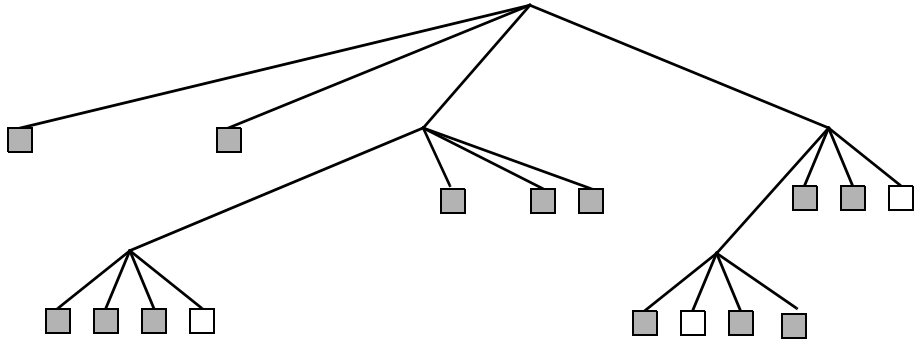
Baumstruktur

- wie bei PM_1-Quadtree
- Änderung:

  Falls ein Blattknoten *B* keinen Eckpunkt enthält, so dürfen durch *B* mehrere Kanten mit einem gemeinsamen Eckpunkt führen (anstatt nur einer Kante)

Beispiel





\+ geringere Höhe des Quadtrees

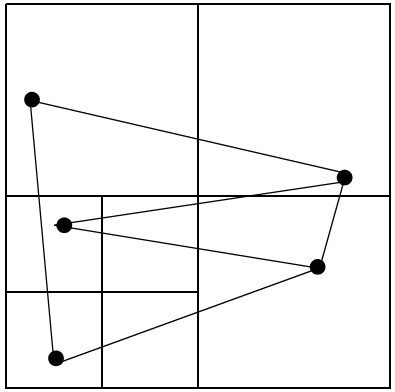
– komplexere Datenstruktur für Blattknoten

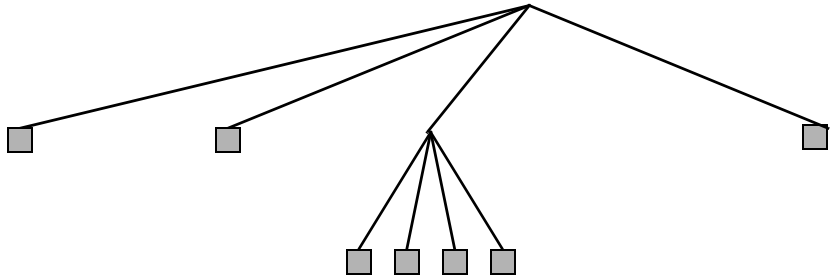
4.4 PM_3-Quadtree

Baumstruktur

- Höchstens ein Eckpunkt eines Polygons liegt in einer Blattzelle
- Eine Blattzelle kann Kanten mit beliebigen Eckpunkten enthalten

Beispiel





\+ noch geringere Höhe des Quadtrees

– noch komplexere Datenstruktur für Blattknoten

4.4 PMR-Quadtree (I)

Baumstruktur

- Kanten werden in alle geschnittenen Blattzellen eingefügt
- c (c > 1) verschiedene Kanten können in einer Blattzelle abgespeichert werden

Einfügen

- Füge eine neue Kante in alle Blattzellen ein, die sich mit der Kante schneiden
- Falls die Zelle übergelaufen ist (mehr als c Kanten), so spalte die Zellen (ggf. rekursiv) in 4 Teile auf
- Falls es nicht möglich ist, den Überlauf zu beseitigen, dann schreibe die überzähligen Kanten in eine Überlaufzelle, die mit der ursprünglichen Blattzelle verkettet ist

Experimentelle Untersuchung

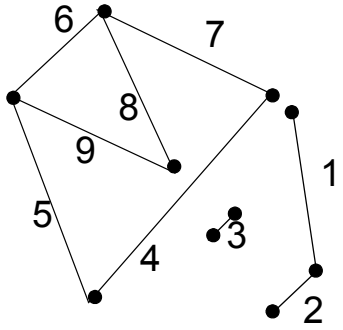
- Der PMR-Quadtree ist den PM_x-Quadtrees bezüglich der Speicherplatzausnutzung überlegen

4.4 PMR-Quadtree (II)

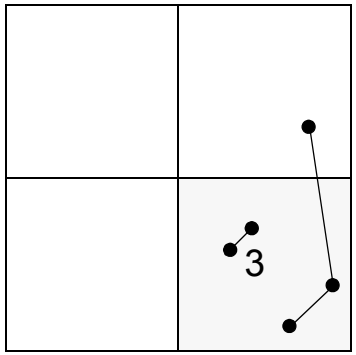
Beispiel

c = 2

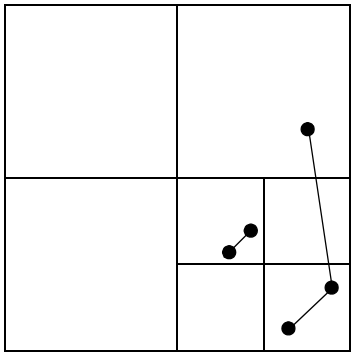
Kantenmenge



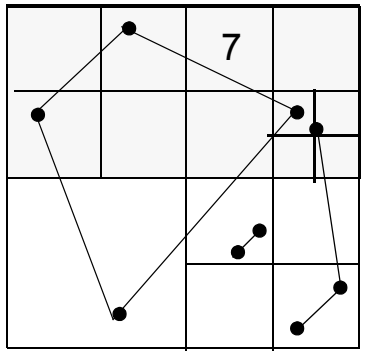
vor 1. Split

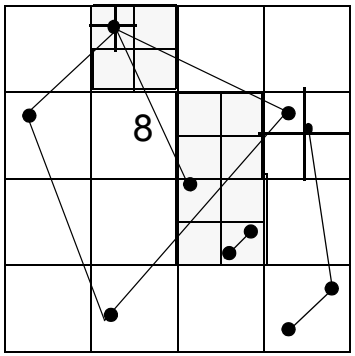


nach 1. Split

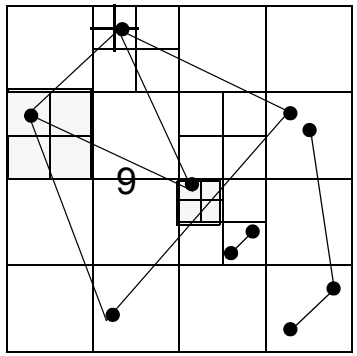


nach 2. / 3. + 4. Split





nach 4.bis 7.Split



nach 8. und 9. Split

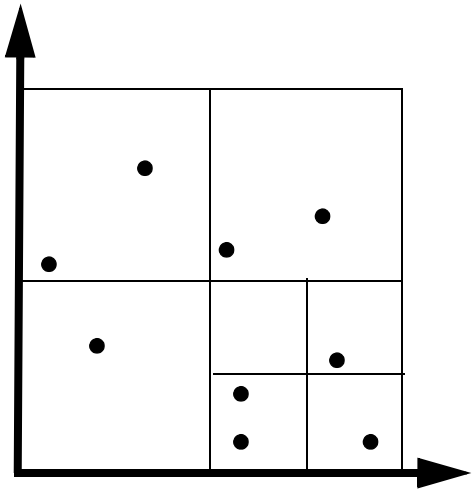
4.4 Abbildung auf Sekundärspeicher (I)

Abbildung der Zugriffsstrukturen auf Sekundärspeicher

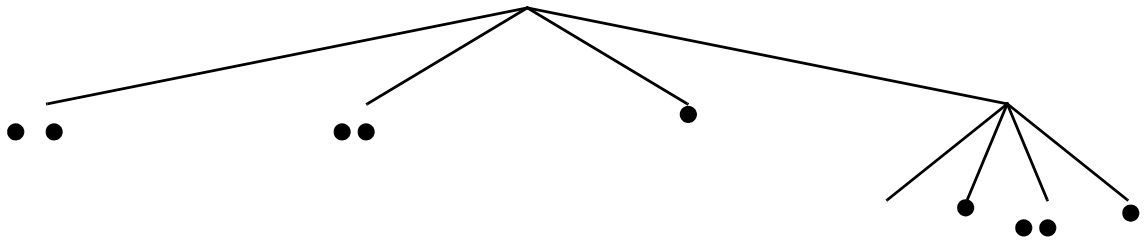
- R-Baum: Knoten = Seite
- Quadtree: ? (in einem Knoten befinden sich nur wenige Einträge)

1. Ansatz: Anpassung der Kapazität der Blattzellen

- Erhöhe die Kapazität der Blattzellen



PR-Quadtree mit einer Blattknotenkapazität 2



  - Organisation der internen Knoten bleibt problematisch

4.4 Abbildung auf Sekundärspeicher (II)

2. Ansatz: Einbettung in eindimensionalen Raum

- Nur gefüllte (schwarze) Blattzellen werden betrachtet
- Eine Blattzelle entspricht einer Datenseite (höhere Kapazität)
- Jede dieser Zellen erhält eine Ordnungsnummer
- Die Zellen werden durch eine herkömmliche, eindimensionale Zugriffsstruktur (z.B. B-Baum) verwaltet

Anforderungen

- Einfache Berechnung der Ordnungsnummer
- Erhalt von räumlicher Nachbarschaft in dieser neuen Ordnung

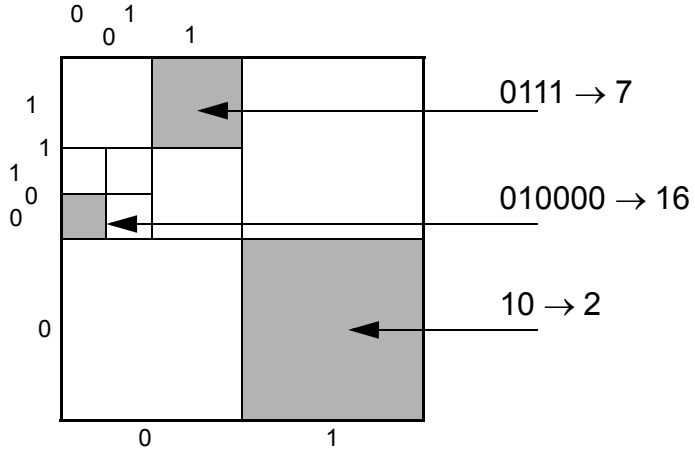
  (Annahme: räumlich benachbarte Objekte werden oft gemeinsam angefragt)

Fragestellung

- Wie sieht eine geeignete Ordnung aus?

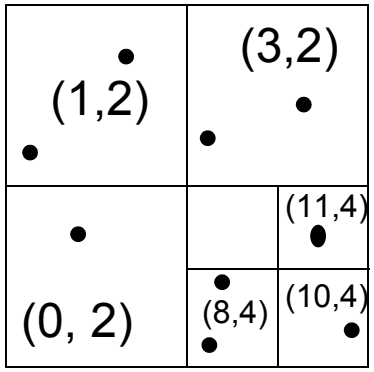
4.4 Linear Quadtree mit Z-Ordnung (I)

- *Codierung* von Quadtree-Zellen:

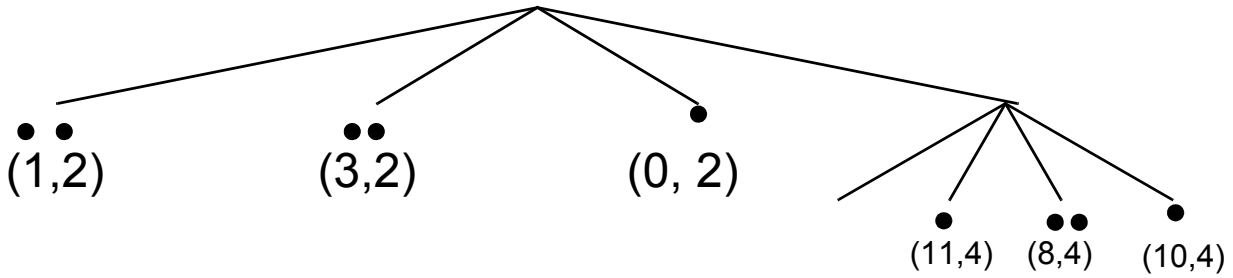


1. Mischen der beiden Bitfolgen, 2. Interpretation als Dezimalzahl

- *Level* eines Codes = Anzahl der Bits
- *Z-Wert* = (Dezimalwert des Codes, Level)



PR-Quadtree mit einer Blattknotenkapazität 2



4.4 Linear Quadtree mit Z-Ordnung (II)

- Lineare Ordnung zur Verwaltung im B^+-Baum
  - Seien (c_1, l_1) und (c_2, l_2) zwei Z-Werte und sei $l = \min \{l_1, l_2\}$.
  - Dann ist die Ordnungsrelation $\leq_Z$ wie folgt definiert:

$$(c_1, l_1) \leq (c_2, l_2) \text{ falls } c_1 \text{ div } 2^{l_1 - l} \leq c_2 \text{ div } 2^{l_2 - l}$$

  - Beispiele:

    $(1,2) \leq_Z (3,2)$, $(3,4) \leq_Z (3,2)$, $(1,2) \leq_Z (10,4)$

- Wenn eine Blattzelle (= Datenseite) des Quadtrees überläuft, die durch den Z-Wert (c,l) repräsentiert wird, dann Split der Seite in 4 Seiten gemäß Quadtree-Strategie
- diese Seiten besitzen die Z-Werte

  (4*c, l + 2), (4*c + 1, l + 2), (4*c + 2, l + 2), (4*c + 3, l + 2)

4.4 Quadtrees: Zusammenfassung

- Quadtrees sind die am häufigsten verwendeten räumlichen Zugriffsstrukturen in Geo-Informationssystemen
- Fülle von Varianten (siehe [Samet])
- Quadtrees werden eingesetzt für die Organisation 2-dimensionaler Punkte, Rechtecke, Streckenzüge und Polygone (für 3-dimensionale Objekte: Octtree)
- Repräsentation von Polygonen durch minimal umgebende Quadtree-Zellen (mit oder ohne Clipping), durch Eckpunkte oder durch Kanten
- Quadtrees können benutzt werden, um Anfragen wie die Punkt-Anfrage, die Fenster-Anfrage und den Spatial Join zu beantworten
- Quadtrees sind ursprünglich als eine Datenstruktur für den Hauptspeicher entworfen worden, können aber durch Verwendung raumfüllender Kurven auch für Sekundärspeicher genutzt werden