Teil IV

Datenstrukturen und Algorithmen

Abschnitt 21: Datenstrukturen

Überblick

Was sind Datenstrukturen?

- Viele Computer-Programme sind in erster Linie dazu da, Daten zu verarbeiten.
- Eine Datenmenge muß dazu intern organisiert und verwaltet werden.
- Als einfache Datenstruktur zur Verwaltung gleichartiger Elemente haben wir für imperative Sprachen das Array kennengelernt.
- Im ersten Teil der Vorlesung haben wir bei den Wechselgeldalgorithmen *Folgen* als Datenstruktur verwendet.
- Ein Äquivalent zum mathematischen Konzept der *Folge* findet sich in vielen Programmiersprachen als *Liste*.
- Auch eine Klasse dient zunächst der Darstellung von Objekten, die einen Ausschnitt der Wirklichkeit abstrahiert repräsentieren.
- Als spezielle Datenstruktur können wir auch die Strings (und verwandte Klassen) betrachten, die für eine Menge von Zeichen stehen.

Die Bedeutung von Datenstrukturen

- Bei vielen Anwendungen besteht die wichtigste Entscheidung in Bezug auf die Implementierung darin, die passende Datenstruktur zu wählen.
- Verschiedene Datenstrukturen erfordern für dieselben Daten mehr oder weniger Speicherplatz als andere.
- Für dieselben Operationen auf den Daten führen verschiedene Datenstrukturen zu mehr oder weniger effizienten Algorithmen.
- Die Auswahlmöglichkeiten für Algorithmus und Datenstruktur sind eng miteinander verflochten. Durch eine geeignete Wahl möchte man Zeit und Platz sparen.

Datenstrukturen als Objekte

- Eine Datenstruktur können wir auch wieder als Objekt auffassen und entsprechend modellieren.
- Das bedeutet, dass eine Datenstruktur Eigenschaften und Fähigkeiten hat, also z.B. typische Operationen ausführen kann.
- Für Arrays haben wir z.B. die typischen Operationen:
  - Setze das *i*-te Element von `a` auf Wert `x`: `a[i]=x;`
  - Gib mir das *j*-te Element von `a`: `a[j];`
  - Gib mir die Anzahl der Elemente in `a`: `a.length`

Arrays vs. Listen

- Wie wir gesehen haben, erlauben Arrays effizient den sogenannten "wahlfreien Zugriff", d.h. wir können auf ein beliebiges Element in $O(1)$ zugreifen.
- Bei der Spezifikation von Folgen aus Kapitel 2+3 (und entsprechenden Listen-Implementierungen) gilt das nicht. Der Zugriff auf das n-te Element erfordert einen Aufwand in $O(n)$.
  Zur Erinnerung: Definition der Projektion

$$\pi(x,i) = \begin{cases} \mathit{first}(x), & \text{falls } i = 1, \\ \pi(\mathit{rest}(x), i-1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Dafür können Folgen (Listen) beliebig wachsen, während wir die Größe eines Arrays von vornherein festlegen müssen.
- Betrachten wir nun im folgenden die Implementierung von Listen etwas genauer, wozu wir uns jetzt natürlich objektorientierte Implementierungen in Java vornehmen wollen.

Überblick

Erinnerung: Folgen

- Konkatenation einer Folge $x \in M^*$ an ein Element $a \in M$:

$$prefix : M \times M^* \to M^*$$

$$\text{mit } prefix(a, x) = (a) \circ x$$

- Induktive Definition von M^*:
  1. $() \in M^*$
  2. Ist $a \in M$ und $x \in M^*$, dann ist $prefix(a, x) \in M^*$.
- Zugriff auf das erste Element:

$$first : M^+ \to M \text{ mit } first(prefix(a, x)) = a$$

- Liste nach Entfernen des ersten Elementes:

$$rest : M^+ \to M^* \text{ mit } rest(prefix(a, x)) = x$$

Einfaches Listenmodell

Erstellen wir zunächst eine einfache Listenimplementierung analog zu dem Verhalten von Folgen wie in Kapitel 3 definiert:

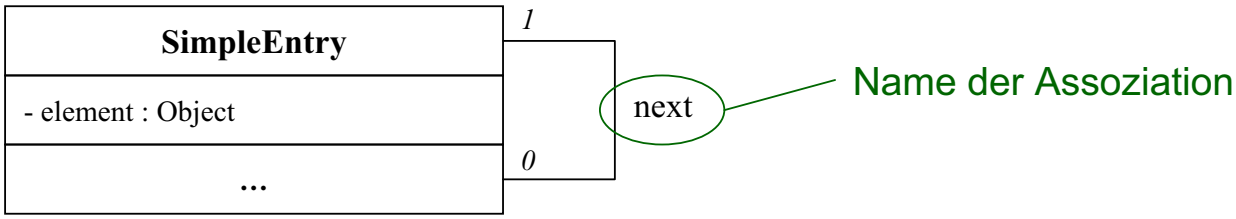
- Eine Liste kann leer sein.
- Ein Element wird vorne an eine Liste angehängt.
- Wir können nur das erste Element einer Liste entfernen.
- Zusätzlich: Eine Liste kann Auskunft über ihre Länge (= Anzahl der Elemente) geben.
  Die Länge einer Folge ist rekursiv definiert als:

$$size(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = (), \\ 1 + size(rest(x)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

imperative, objektorientierte Modellierung?

Element der Liste als besonderes Objekt

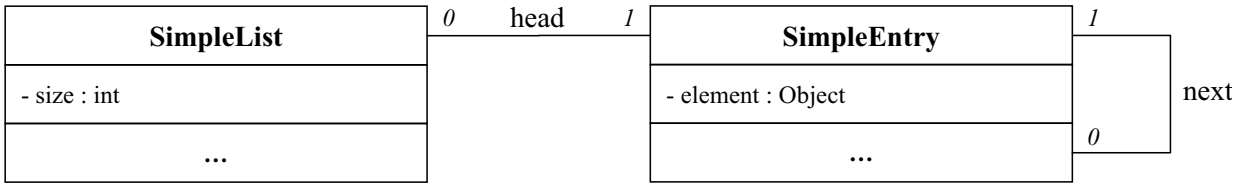
- Von der Objektorientierung herkommend, können wir ein Element der Liste zunächst als eigenständiges Objekt ansehen.
- Dieses Objekt hält das eigentlich gespeicherte Element.
- Andererseits hält das Element-Objekt einen Verweis auf das nächste Element, den Nachfolger.



Element der Liste als besonderes Objekt

```
public class SimpleEntry
{
  private Object element;
  private SimpleEntry next;

  public SimpleEntry(Object o, SimpleEntry next)
  {
    this.element = o;
    this.next = next;
  }

  public Object getElement()
  {
    return this.element;
  }

  public SimpleEntry getNext()
  {
    return this.next;
  }

  public void setNext(SimpleEntry next)
  {
    this.next = next;
  }
}
```

Liste und Elemente (UML)

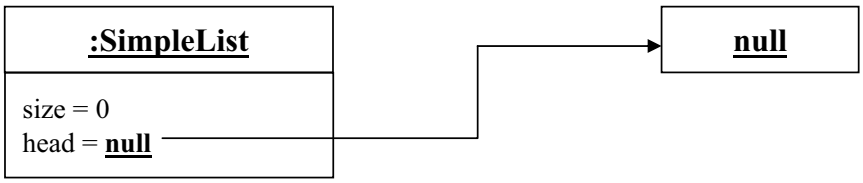


- Ermöglicht Zugriff auf das erste Element.
- Wie kommt man an den Rest der Liste?
- Wie sieht die leere Liste aus?

Liste hält Verweis auf erstes Element

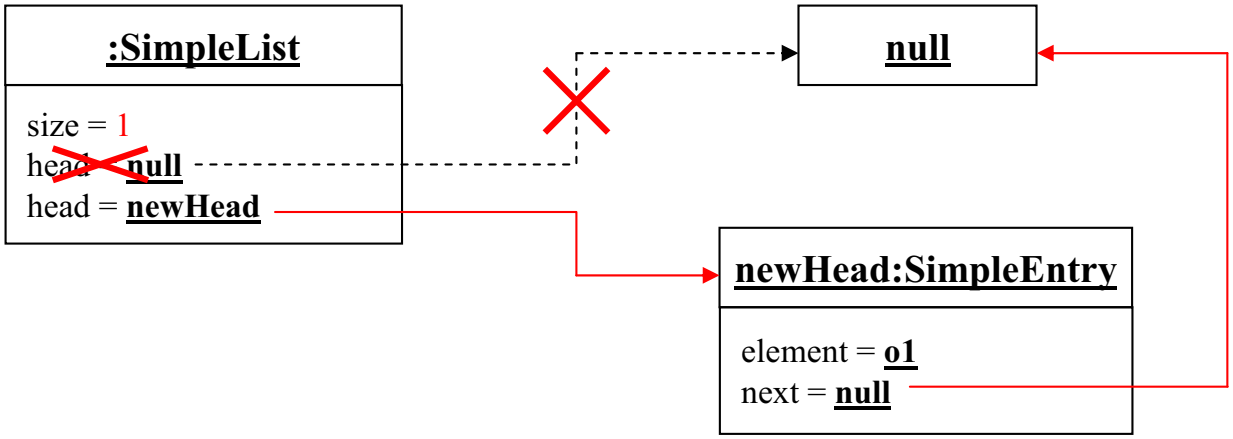
- Die Liste muss nur das erste Element kennen, über dessen Zeiger zum nächsten Element können alle Nachfolger erreicht werden.
- In der leeren Liste ist das erste Element **`null`**.

```
public class SimpleList
{
  private int size;

  private SimpleEntry head;

  public SimpleList()
  {
    this.size = 0;
    this.head = null;
  }

  public int length()
  {
    return this.size;
  }

  ...

}
```

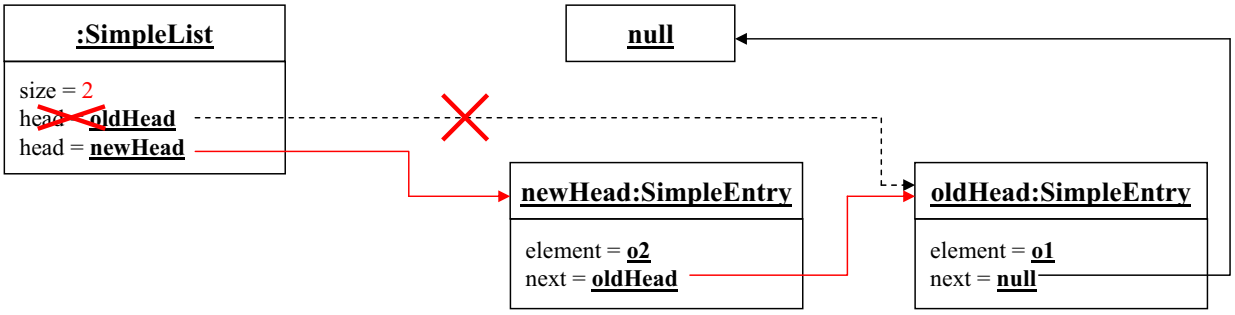


Liste: Hinzufügen eines Elementes

- Um ein neues Element hizuzufügen, wird ein neues `SimpleEntry`-Element erzeugt und als neues erstes Element gesetzt.
- Dessen Nachfolger ist das alte erste Element.
- Die Länge der Liste erhöht sich um 1.



Liste: Hinzufügen eines Elementes




```
...
public void add(Object o)
{
  SimpleEntry newHead = new SimpleEntry(o, this.head);
  this.head = newHead;
  this.size++;
}
...
```

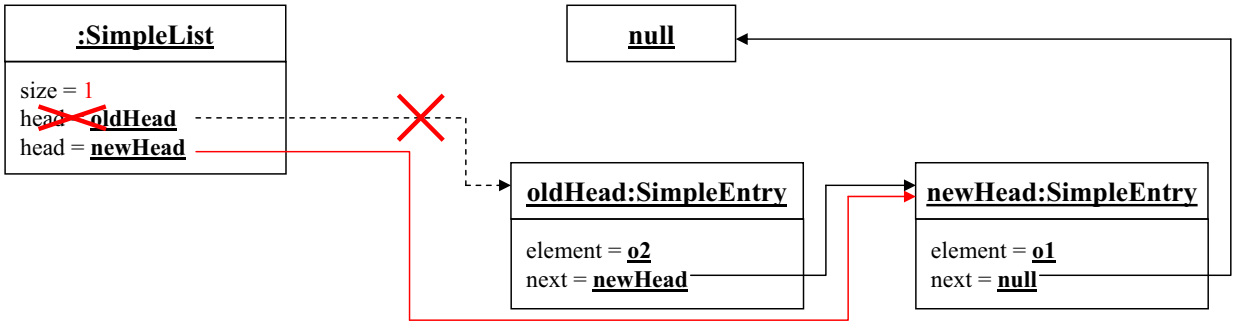
Liste: Wert des ersten Elementes

- Nur den Wert des ersten Elementes zu bekommen, ist einfach.
- Probleme können bei der leeren Liste auftreten.

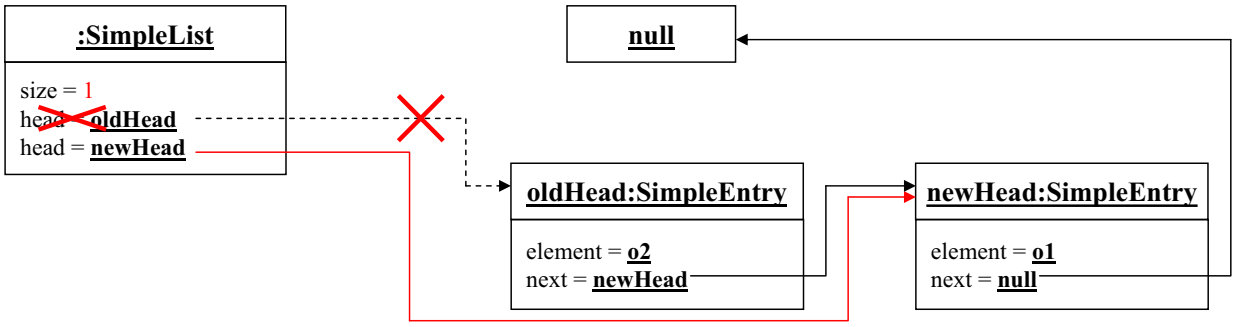
```
...

public Object head()
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List - no head element available.");
  }
  return this.head.getElement();
}

...
```


Liste: Entfernen des ersten Elementes

- Um das erste Element zu entfernen, muss der Head-Zeiger der Liste auf den Nachfolger des ersten Elementes zeigen.
- Die Länge der Liste wird erniedrigt.
- Danach gibt es keine Zugriffsmöglichkeit mehr für das erste Element.
- Wiederum können Probleme bei der leeren Liste auftreten.



Liste: Entfernen des ersten Elementes




```
public void removeHead()
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List - no head element available.");
  }
  this.head = this.head.getNext();
  this.size--;
}
```


Verbesserung: Kapselung der Wrapper-Klasse für Einträge

- Die Klasse `SimpleEntry` wird niemals außerhalb der Liste gebraucht, sondern dient nur als Wrapper für das eigentliche Element und die Verkettung zum nächsten Element.
- Java bietet eine Möglichkeit, um diese enge Beziehung auszudrücken: `SimpleEntry` kann man als innere Klasse der Liste definieren.

```
public class SimpleList2
{
  private int size;
  ...

  private static class SimpleEntry
  {
    private Object element;
    ...
  }
}
```

- Innere Klassen sollte man nur sehr zurückhaltend verwenden, aber in diesem Fall ist die Verwendung sinnvoll.

Problem: Unbekannter Typ der Listen-Elemente

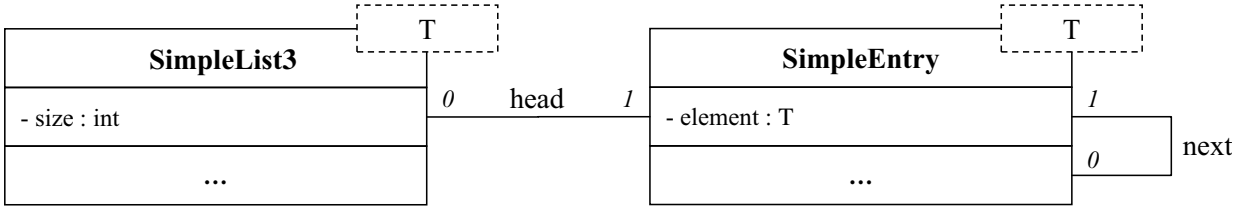
- Bisher können wir jedes beliebige Objekt in unserer Liste ablegen.

```
public class SimpleEntry {
  private Object element;
  private SimpleEntry next;

  public SimpleEntry(Object o, SimpleEntry next){
    this.element = o;
    this.next = next;
  }

  public Object getElement(){
    return this.element;
  }
  ...
}
```

- Was ist hieran problematisch?

Verbesserung 2: Typisierung der Liste

- Durch die Verwendung von `Object` als Typ des Listeneintrags sind in der Verwendung dem Auftreten von Typfehlern Tür und Tor geöffnet.
- Wir kennen schon eine Möglichkeit, die Liste typsicher zu machen: Typisierung der Klasse.



Verbesserung 2: Typisierung der Liste

```
public class SimpleList3<T>
{
  private int size;

  private SimpleEntry<T> head;

  public SimpleList3()
  {
    this.size = 0;
    this.head = null;
  }

  public int length()
  {
    return this.size;
  }
  ...
```


Verbesserung 2: Typisierung der Liste

```
  ...
  public void add(T o)
  {
    SimpleEntry<T> newHead = new SimpleEntry<T>(o, this.head);
    this.head = newHead;
    this.size++;
  }

  public T head()
  {
    if(this.head==null)
    {
      throw new NullPointerException("Empty List - no head element available.");
    }
    return this.head.getElement();
  }

  public void removeHead()
  {
    if(this.head==null)
    {
      throw new NullPointerException("Empty List - no head element available.");
    }
    this.head = this.head.getNext();
    this.size--;
  }
  ...
```

Verbesserung 2: Typisierung der Liste

```
...
private static class SimpleEntry<T>
{
  private T element;

  private SimpleEntry<T> next;

  public SimpleEntry(T o, SimpleEntry<T> next)
  {
    this.element = o;
    this.next = next;
  }
  ...
```


Verbesserung 2: Typisierung der Liste

```
  ...
  public T getElement()
  {
    return this.element;
  }

  public SimpleEntry<T> getNext()
  {
    return this.next;
  }

  public void setNext(SimpleEntry<T> next)
  {
    this.next = next;
  }
}
}
```

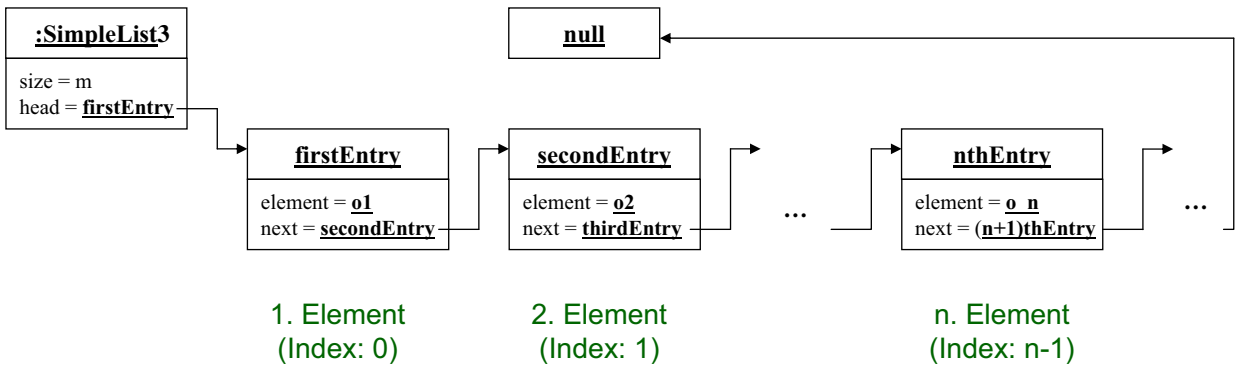
Zugriff auf das n-te Element?

Erweiterungswünsche für die Datenstruktur Liste:

- Wie können wir auf das n-te Element der Liste zugreifen?
- Wie können wir das n-te Element aus der Liste entfernen?
- Wie können wir ein Element an der n-ten Stelle in die Liste einfügen?

n-tes Element (mit Index $n-1$)

Um das n-te Element einer Liste zu bekommen, müssen die ersten $n-1$ Elemente durchlaufen werden:

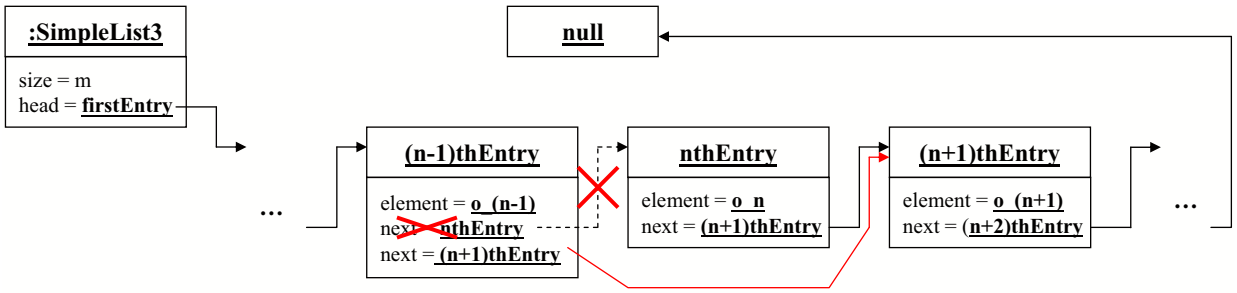


n-tes Element (mit Index $n-1$)

```
...
public T get(int index)
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List.");
  }
  if(index>=this.length())
  {
    throw new IllegalArgumentException(index+" exceeds length of list.");
  }
  SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
  while(index>0)
  {
    currentEntry = currentEntry.getNext();
    index--;
  }
  return currentEntry.getElement();
}
...
```


n-tes Element entfernen

- Um das n-te Element aus einer Liste zu entfernen, müssen ebenfalls die ersten $n-1$ Elemente durchlaufen werden.
- Dann muss der Verweis des $n-1$-ten-Elementes auf den neuen Nachfolger "umgebogen" werden:

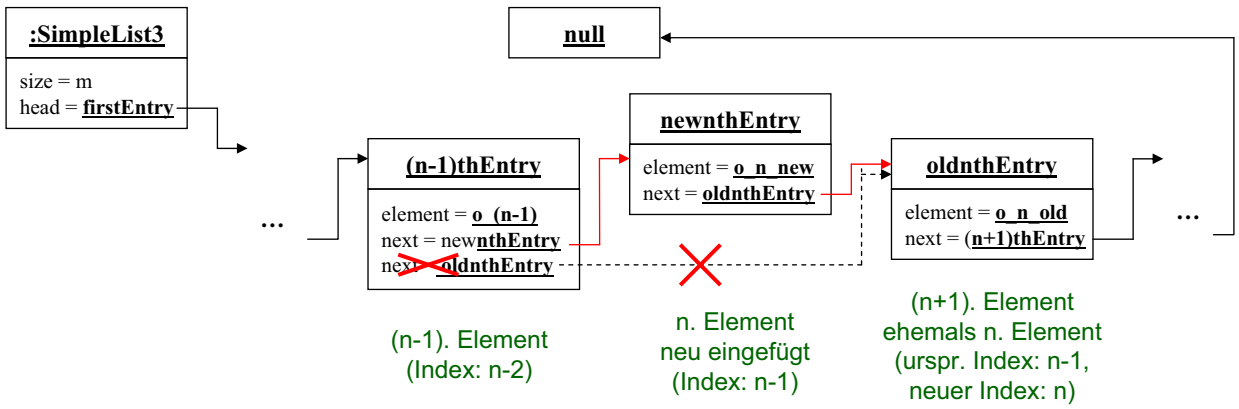


n-tes Element entfernen

```
...
public void delete(int index)
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List.");
  }
  if(index>=this.length())
  {
    throw new IllegalArgumentException(index+" exceeds length of list.");
  }
  SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
  while(index>1)
  {
    currentEntry = currentEntry.getNext();
    index--;
  }
  currentEntry.setNext(currentEntry.getNext().getNext());
  this.size--;
}
...
```


Element an Stelle *n* einfügen

- Um ein Element an einer bestimmten Stelle *n* einzufügen, müssen wiederum die ersten $n-1$ Elemente durchlaufen werden.
- Dann muss der Verweis des $n-1$-Elementes auf den neuen Nachfolger "umgebogen" werden.
- Zuvor brauchen wir aber den alten Verweis, weil der neue Nachfolger des $n-1$-ten Elements als Nachfolger den alten Nachfolger des $n-1$-ten Elements haben muss.



Element an Stelle *n* einfügen

```
...
public void insert(T o, int index)
{
  if(index > this.length())
  {
    throw new IllegalArgumentException(index+" exceeds length of list.");
  }
  if(this.head==null)
  {
    this.head = new SimpleEntry<T>(o,null);
  }
  else
  {
    SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
    while(index > 1)
    {
      currentEntry = currentEntry.getNext();
      index--;
    }
    SimpleEntry<T> newEntry = new SimpleEntry<T>(o,currentEntry.getNext());
    currentEntry.setNext(newEntry);
  }
  this.size++;
}
...
```


Code-Fragment

Was passiert in diesem Code-Fragment?

```
...
  SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
  while(currentEntry!=null && !currentEntry.getElement().equals(o))
  {
    currentEntry = currentEntry.getNext();
  }
  return currentEntry!=null;
...
```

Suche nach einem Element

Häufige Anforderung: Stelle fest, ob die Liste ein Objekt bestimmter Art enthält.

```
...
public boolean contains(T o)
{
  SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
  while(currentEntry!=null && !currentEntry.getElement().equals(o))
  {
    currentEntry = currentEntry.getNext();
  }
  return currentEntry!=null;
}
...
```


Darstellung der Liste

Um sich den aktuellen Zustand der Liste anzuschauen, überschreibt man am besten die `toString`-Methode in geeigneter Weise.

```
...
public String toString()
{
  StringBuilder builder = new StringBuilder();
  builder.append("[");
  for(SimpleEntry<T> entry = this.head; entry!=null; entry=entry.getNext())
  {
    builder.append(entry.getElement().toString());
    if(entry.getNext()!=null)
    {
      builder.append(", ");
    }
  }
  builder.append("]");
  return builder.toString();
}
...
```

Liste in ein Array umwandeln

Wenn sich die Länge einer Liste nicht mehr ändert, ist es oft praktischer, mit einem Array weiterzuarbeiten. Warum?

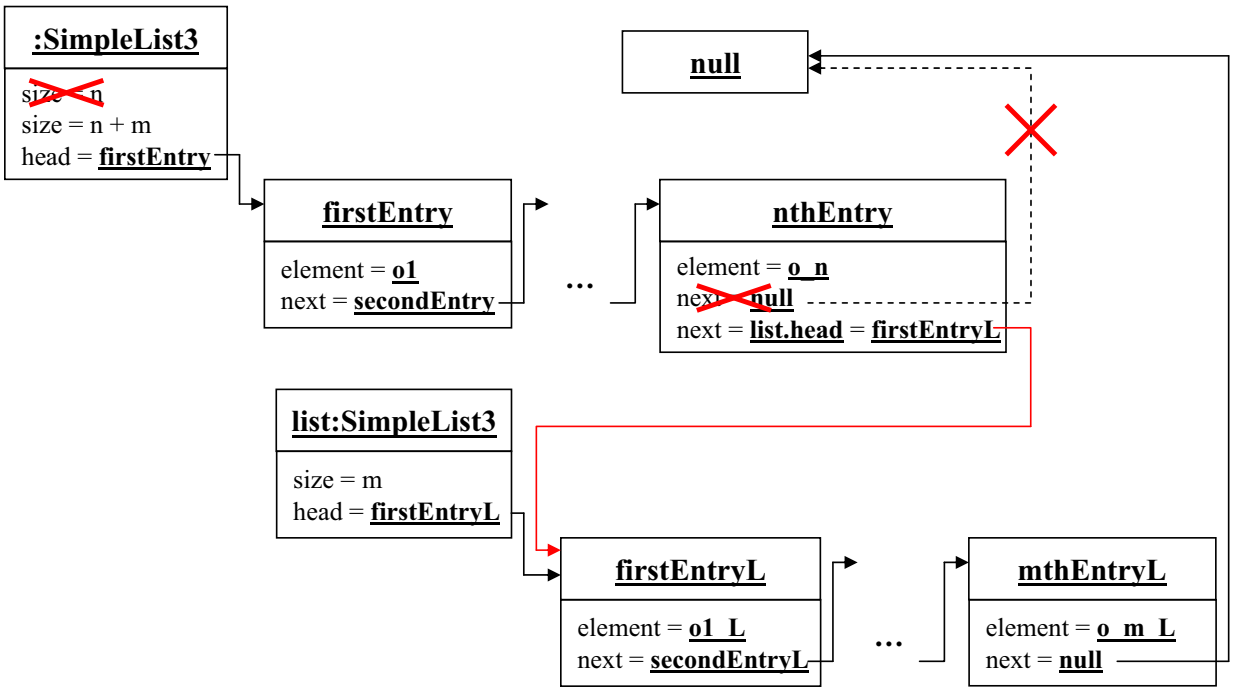
```
...
public T[] asArray()
{
  // hier wird sich der Compiler besorgt zeigen:
  // Type safety: The cast from Object[] to T[]
  // is actually checking against the erased type Object[]
  // Erinnerung: wir koennen keine generisch typisierten Arrays erzeugen
  T[] array = (T[]) new Object[this.size];
  int index = 0;
  for(SimpleEntry<T> entry = this.head; entry!=null; entry=entry.getNext())
  {
    array[index++] = entry.getElement();
  }
  return array;
}
...
```


Append: Eine Liste anhängen

- Die Methode `append` soll eine andere Liste an diese Liste anhängen.
- Wie kann diese Funktionalität implementiert werden?

Append: Eine Liste anhängen

- Das letzte Element dieser Liste soll nicht mehr auf **`null`** verweisen, sondern auf das erste Element der anderen Liste:



Append: Eine Liste anhängen

```
public void append(SimpleList3<T> list)
{
  SimpleEntry<T> last = this.head;
  while(last.getNext()!=null)
  {
    last = last.getNext();
  }
  last.setNext(list.head);
  this.size += list.length();
}
```

Zeitbedarf für append?

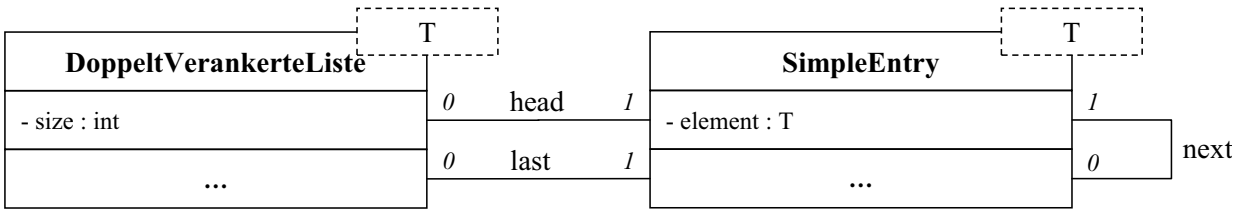
Append: Eine Liste anhängen

```
public void append(SimpleList3<T> list)
{
  SimpleEntry<T> last = this.head;
  while(last.getNext()!=null)
  {
    last = last.getNext();
  }
  last.setNext(list.head);
  this.size += list.length();
}
```

- In der bisherigen Implementierung muss man für die `append`-Methode die erste Liste ganz durchwandern ($O(n)$).
- Man kann die Liste aber auch so implementieren, dass sich der Zeitbedarf für `append` auf $O(1)$ reduziert.

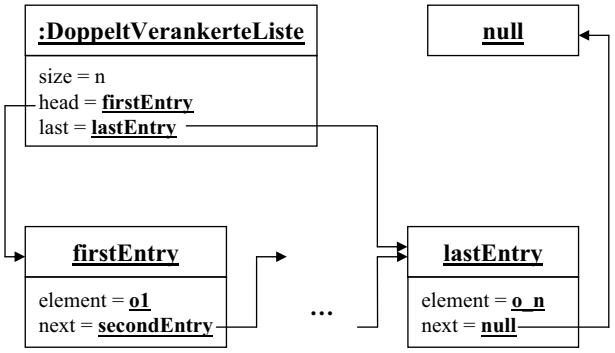
Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

- Lösung: halte den Verweis auf das letzte Element als Attribut der Liste:

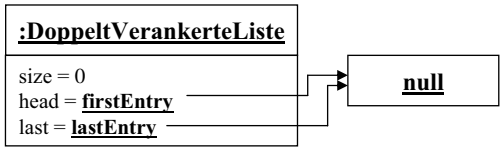


Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

Allgemeines Schema:



Nach Instanziierung:

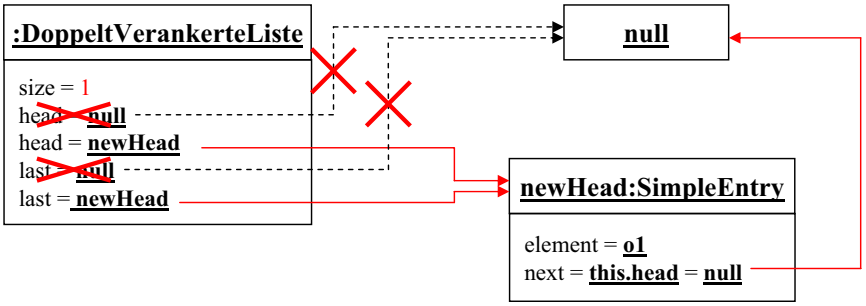


Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

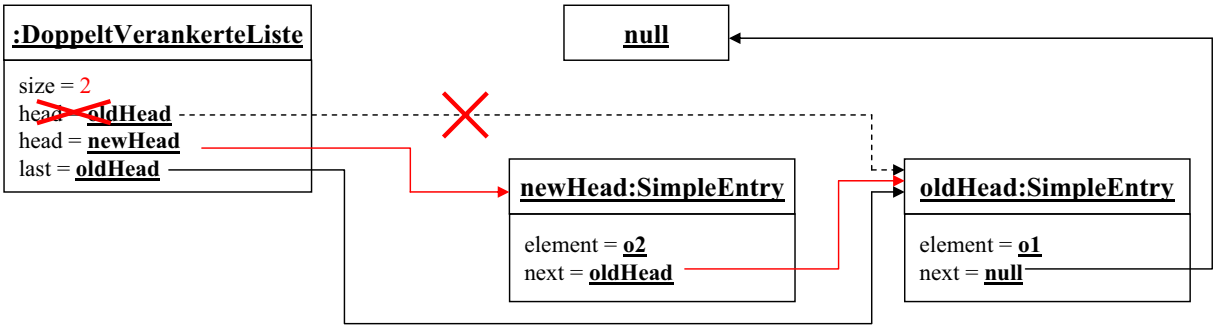
```
public class DoppeltVerankerteListe<T>
{
  private int size;

  private SimpleEntry<T> head;

  private SimpleEntry<T> last;

  public DoppeltVerankerteListe()
  {
    this.size = 0;
    this.head = null;
    this.last = null;
  }
  ...
```

Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

Erstes Einfügen:



Zweites Einfügen:

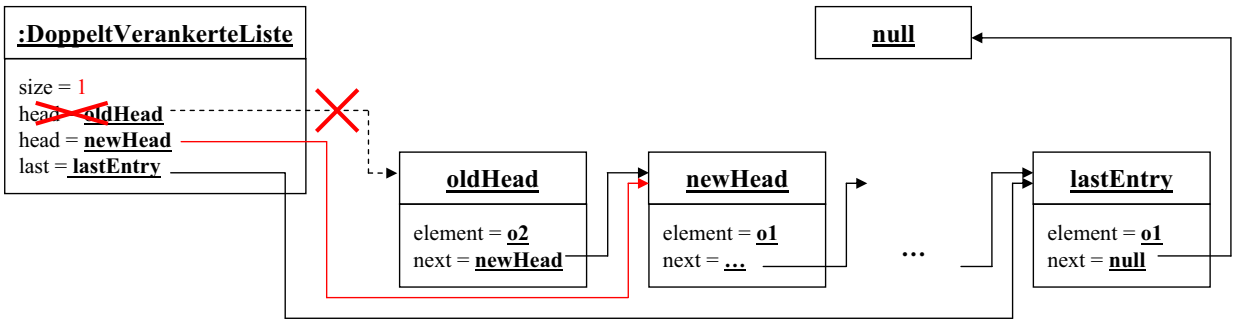


Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

```
public void add(T o)
{
  SimpleEntry<T> newHead = new SimpleEntry<T>(o, this.head);
  this.head = newHead;
  if(this.last==null)
  {
    this.last = newHead;
  }
  this.size++;
}
```

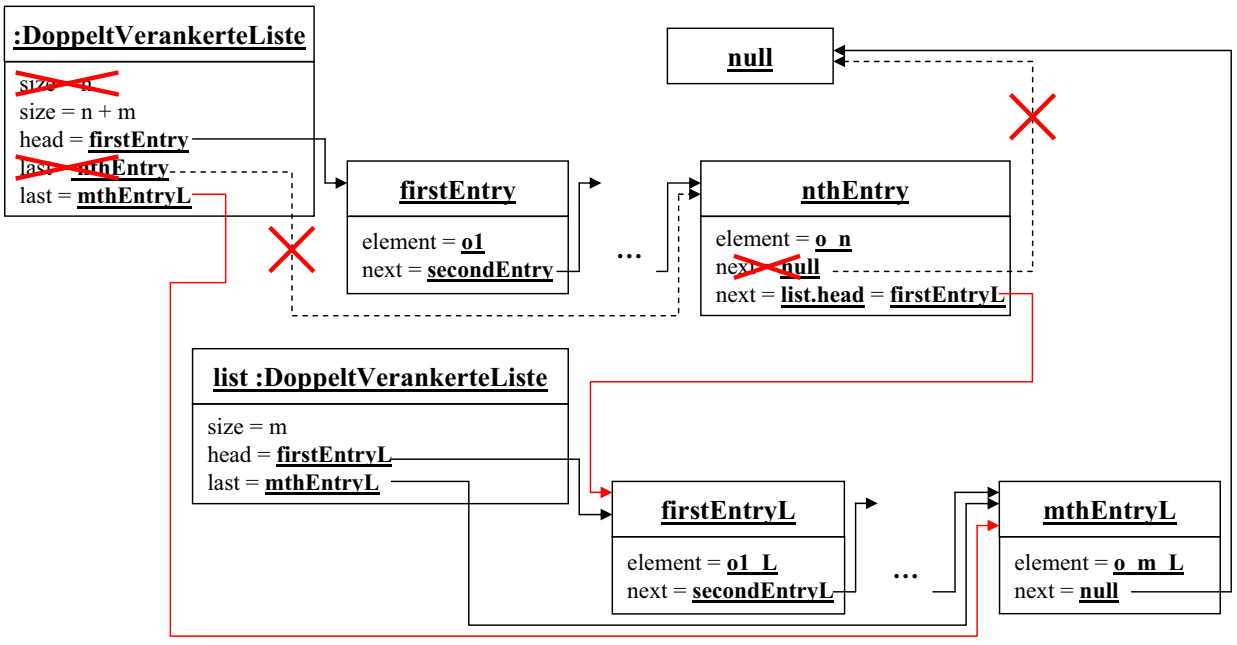
Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

```
public void removeHead()
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List - no head element available.");
  }
  this.head = this.head.getNext();
  if(this.head==null)
  {
    this.last = null;
  }
  this.size--;
}
```



Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

```
public void append(DoppeltVerankerteListe<T> list)
{
  this.last.setNext(list.head);
  this.last = list.last;
  this.size += list.length();
}
```



Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

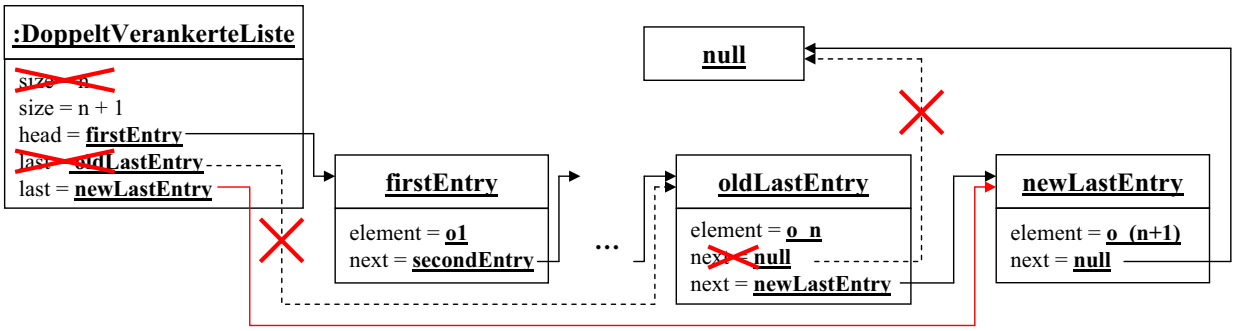
```
public void delete(int index)
{
  if(this.head==null)
  {
    throw new NullPointerException("Empty List.");
  }
  if(index>=this.length())
  {
    throw new IllegalArgumentException(index+" exceeds length of list.");
  }
  SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
  while(index>1)
  {
    currentEntry = currentEntry.getNext();
    index--;
  }
  if(currentEntry.getNext()==this.last)
  {
    this.last = currentEntry;
    this.last.setNext(null);
  }
  else
  {
    currentEntry.setNext(currentEntry.getNext().getNext());
  }
  this.size--;
}
```


Effizienzverbesserung: Doppelt-verankerte Liste

```
...
public void insert(T o, int index){
  if(index > this.length()){
    throw new IllegalArgumentException(index+" exceeds length of list.");
  }
  if(this.head==null){
    this.head = new SimpleEntry<T>(o,null);
    this.last = this.head;
  }
  else{
    SimpleEntry<T> currentEntry = this.head;
    while(index>1){
      currentEntry = currentEntry.getNext();
      index--;
    }
    SimpleEntry<T> newEntry = new SimpleEntry<T>(o,currentEntry.getNext());
    if(currentEntry==this.last){
      this.last=newEntry;
    }
    currentEntry.setNext(newEntry);
  }
  this.size++;
}
...
```

Einfügen am Ende der Liste

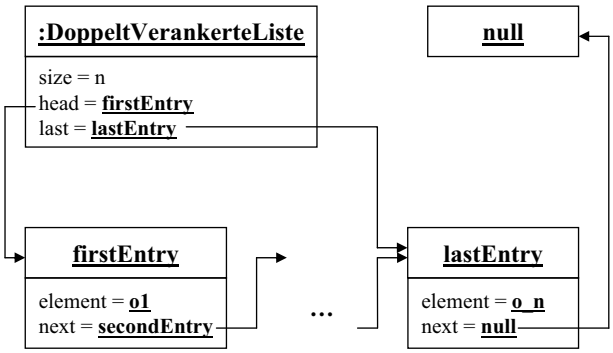
- Damit haben wir gleichzeitig eine effiziente Möglichkeit gewonnen, ein Element am Ende der Liste einzufügen.



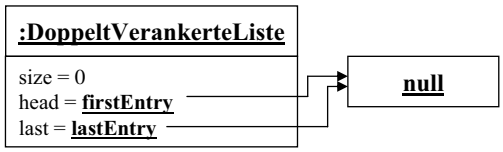

```
public void append(T o)
{
  SimpleEntry<T> newLast = new SimpleEntry<T>(o, null);
  this.last.setNext(newLast);
  this.last = newLast;
  this.size++;
}
```


Entfernen am Ende der Liste

Allgemeines Schema:



Nach Instanziierung:



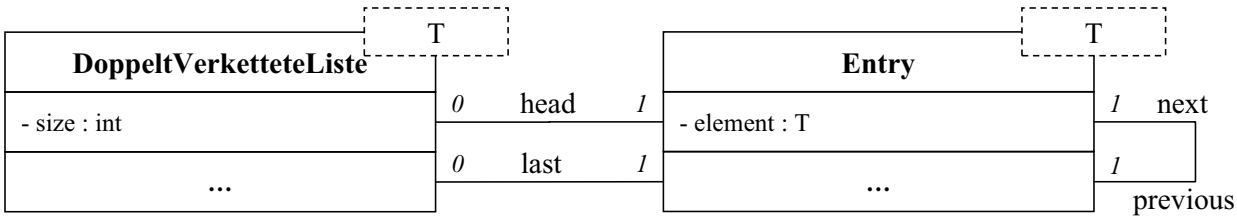
- Ist auch das Entfernen am Ende der Liste möglich?

Entfernen am Ende der Liste

- Der Zeiger für das letzte Element muss auf das vorletzte Element "umgebogen" werden.
- In der bisherigen Implementierung müssten wir dazu wieder von vorne die Liste durchlaufen.
- Lösung: Doppelt-*verkettete* Liste.

Doppelt-verkettete Liste

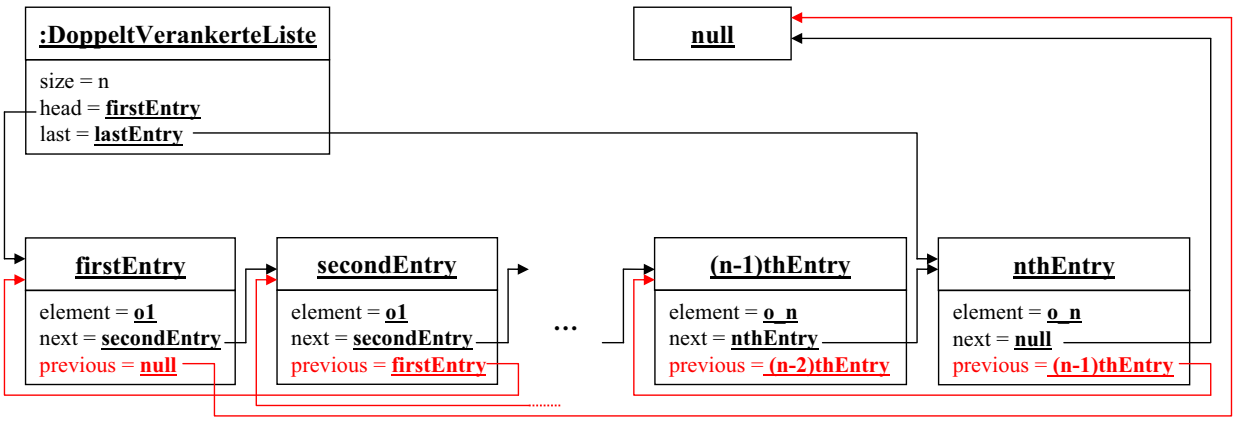
- Jeder Eintrag `Entry` enthält auch einen Verweis auf seinen Vorgänger.
- Dadurch kann man die Liste auch von hinten nach vorne durchlaufen.
- Entfernen des letzten Elementes: $O(1)$.



Doppelt-verkettete Liste

```
...
private static class Entry<T>
{
  private T element;

  private Entry<T> next;

  private Entry<T> previous;

  public Entry(T o, Entry<T> next, Entry<T> previous)
  {
    this.element = o;
    this.next = next;
    this.previous = previous;
  }
  ...
}
```


Doppelt-verkettete Liste



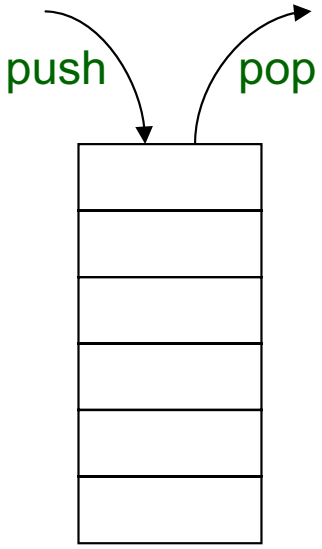
- Zur Übung: Welche Änderungen werden in den bisherigen Methoden dadurch nötig?

Doppelt-verkettete Liste als Standard

- Im imperativen Paradigma wächst eine Liste normalerweise nicht nach vorne, sondern nach hinten.
- Die einfache Anfüge-Operation hängt ein neues Element hinten an.
- Einfügen und Löschen ist auch an beliebiger Stelle möglich.
- Standard-Implementierungen einer verketteten Liste sind oft doppelt-verkettete Listen (z.B. `java.util.LinkedList`).

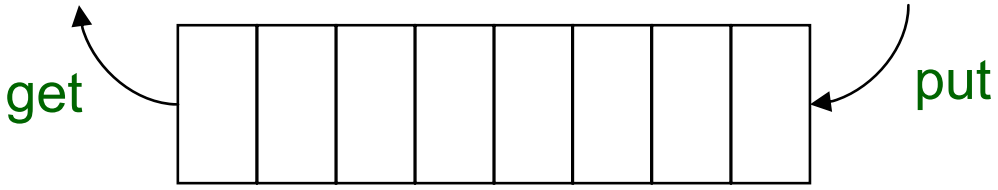
Beispiel: Keller (Stapel, Stack)

- Den Keller als LIFO-Datenstruktur haben wir bereits kennengelernt.
- Wir wollen einen Kellerspeicher mit zwei Operationen:
  - `void push(o)` – legt Objekt `o` auf dem Stapel ab.
  - `E pop()` – entfernt oberstes Element (vom Typ `E`) und gibt es zurück.
- Welche Mittel benötigen wir *minimal* zur Implementierung:
  - Einfach verkettete Liste?
  - Doppelt verankerte Liste?
  - Doppelt verkettete Liste?



Beispiel: Warteschlange (Queue)

- Die Warteschlange (Queue) ist eine häufig benötigte FIFO-Datenstruktur.
- Typischerweise zwei Operationen:
  - `void put(o)` – fügt das Objekt `o` an die Schlange an.
  - `E get()` – entfernt vorderstes Element (vom Typ `E`) und gibt es zurück.



- Welche Mittel sind zur Implementierung am besten geeignet:
  - Einfach verkettete Liste?
  - Doppelt verankerte Liste?
  - Doppelt verkettete Liste?

Flexible Datenstrukturen mit effizientem wahlfreiem Zugriff

- Den Vorteil der flexiblen Länge haben wir in den bisherigen Implementierungen dadurch erkauft, dass der Zugriff auf das n-te Element eine Zeitkomplexität von $O(n)$ hat.
- Andere Implementierungen verwirklichen die flexible Länge durch ein internes Array.
- Wird das interne Array zu kurz, wird es durch ein längeres ersetzt und der Inhalt des alten Arrays in das neue kopiert.
- Beispiele für diese Implementierung kennen Sie bereits mit `StringBuilder` und `StringBuffer`.
- Allgemeine, array-basierte Listen-Implementierungen: `java.util.ArrayList` und `java.util.Vector`.
- Der Vorteil durch zeiteffizienten wahlfreien Zugriff ($O(1)$) wird erkauft durch höheren Speicherplatzbedarf und gelegentlichen Kopieraufwand beim Wachsen der Liste.
- Weitere Vor- und Nachteile der beiden grundsätzlichen Arten der Implementierung (Array-basiert vs. verkettet)?