Überblick

Beweisprinzip der "vollständigen Induktion"

Ein fundamentales mathematisches Beweisprinzip ist die *vollständige Induktion*:
Sei $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{B}$ ein totales Prädikat.
Falls

1. $p(0)$ (*Induktionsanfang*) und
2. für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ gilt der *Induktionsschluss*:
   "Falls $p(n)$ (*Induktionsvoraussetzung*), dann $p(n+1)$."

dann: $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Die vollständige Induktion ("nach n") ermöglicht es zu beweisen, dass eine Aussage ("p") für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweisprinzip der "vollständigen Induktion"

Beispiel:

- Sei $p(n) : \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$
- Zu beweisen: Gültigkeit von $p(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
- Induktionsanfang:
  - Zu zeigen, dass $p(0)$, d.h. $\sum_{i=0}^{0} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
  - $\sum_{i=0}^{0} i = 0$
  - $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$ $\surd$
- Für den Induktionsschluss können wir für $n \in \mathbb{N}_0$ als Induktionsvoraussetzung $p(n)$, d.h. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ annehmen.
- Zu zeigen ist die Gültigkeit von $p(n+1)$, d.h. $\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2}$

Beweisprinzip der "vollständigen Induktion"

Beweis (unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= 0 + 1 + \ldots + n + (n+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2} \qquad \surd
\end{aligned}
$$

Warum ist dieses Beweisprinzip gültig?

Wie kann man sicher sein, dass p für alle Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ gilt, wenn $p(0)$ gilt und man für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}_0$ von $p(n)$ auf $p(n+1)$ schließen kann?

Induktive Definition der Menge $\mathbb{N}_0$

Die Menge $\mathbb{N}_0$ lässt sich durch folgende Regeln *induktiv definieren*:

1. $0 \in \mathbb{N}_0$
2. Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist auch $n+1 \in \mathbb{N}_0$.
3. Außer den Elementen gemäß Regeln 1 und 2 enthält $\mathbb{N}_0$ keine weiteren Objekte.

Aufbau der Menge $\mathbb{N}_0$

Die Elemente der Menge $\mathbb{N}_0$ werden gemäß dieser induktiven Definition der Reihe nach "konstruiert":

- Zunächst wird 0 gemäß Regel 1 als Element von $\mathbb{N}_0$ festgelegt.
- Wegen Regel 2 ist dann $0 + 1 = 1$ Element von $\mathbb{N}_0$.
- Erneute Anwendung von Regel 2 ergibt $1 + 1 = 2$ als Element von $\mathbb{N}_0$ usw.

"$n + 1$" können wir auch die Nachfolger-Funktion nennen:

$$\begin{aligned} \mathit{successor} &: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \\ \text{mit} &\quad n \mapsto n + 1 \end{aligned}$$

Jede Zahl aus $\mathbb{N}_0$ wird erzeugt durch endlich-oft-malige Anwendung von *successor* auf 0, z.B.:

$$3 = \mathit{successor}(\mathit{successor}(\mathit{successor}(0))), \text{ also gilt: } 3 \in \mathbb{N}_0$$

Zusammenhang zwischen "Vollständiger Induktion" und "Induktiver Definition"

- Dieser "induktive Aufbau" der Menge $\mathbb{N}_0$ ist der Grund für die Gültigkeit des Beweisprinzips der vollständigen Induktion.
- Das Prinzip der vollständigen Induktion vollzieht genau diesen Erzeugungsmechanismus der Menge $\mathbb{N}_0$ nach:
  - Der Induktionsanfang verifiziert $p(0)$.
  - Mit dem Induktionsschluss, angewendet auf $n = 0$, erhält man $p(0 + 1)$, d.h. $p(1)$.
  - Mit einem weiteren Induktionsschluss, angewendet auf $n = 1$, erhält man $p(1 + 1)$, d.h. $p(2)$ usw.
- Da $\mathbb{N}_0$ nur Elemente enthält, die gemäß der induktiven Definition von $\mathbb{N}_0$ konstruiert sind, gilt dann also p tatsächlich für alle Zahlen aus $\mathbb{N}_0$.

Rekursive Definition von Abbildungen

- Eine weitere Konsequenz der induktiven Definition von $\mathbb{N}_0$ ist die Ermöglichung der *rekursiven Definition* von Abbildungen von $\mathbb{N}_0$.
- Die rekursive Definition einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{N}_0$ bedeutet intuitiv:
  - $f(0)$ wird explizit festgelegt.
  - $f(n+1)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ wird auf $f(n)$ "zurückgeführt", d.h. in Abhängigkeit von $f(n)$ definiert.
  - Die Werte der Funktion $f(0), f(1), f(2)$ usw. sind dann wie oben erzeugbar, was $f(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ festlegt.

Beispiel: Fakultäts-Funktion

- Die Fakultäts-Funktion $! : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist rekursiv definiert wie folgt:
  - $0! = 1$
  - $(n+1)! = (n+1) \cdot (n!)$
- Oft wird äquivalent statt der Rückführung von $n+1$ auf n der Fall $n \neq 0$ auf $n-1$ zurückgeführt:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel: Summen-Formel

- Die Summenformel aus dem obigen Beispiel zum Beweis durch vollständige Induktion lässt sich ebenfalls rekursiv definieren:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} i + n & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion eignet sich besonders gut, wenn in der zu beweisenden Aussage rekursiv definierte Abbildungen auftreten.

Beispiel: Summen-Formel

- Unabhängig von der Gestalt des Summanden lässt sich eine Summenformel grundsätzlich immer rekursiv definieren.
- Sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{n} a(i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-1} a(i) + a(n) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Induktive Definition von Folgen

- Folgen haben wir oben als n-Tupel definiert, also als Elemente aus M^*.
- Hierbei gilt offensichtlich, dass eine Folge der Länge 1 $(a) \in M$ mit ihrem einzigen Element $a \in M$ identisch ist.
- Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft können wir Folgen auch induktiv definieren.
- Hilfsfunktionen hierzu ermöglichen das Anfügen eines Elementes $a \in M$ an eine Folge $x \in M^*$:

$$postfix : M^* \times M \to M^*$$

$$\text{mit } postfix(x, a) = x \circ (a)$$

- oder analog das Anfügen einer Folge $x \in M^*$ an ein Elemente $a \in M$:

$$prefix : M^* \times M \to M^*$$

$$\text{mit } prefix(a, x) = (a) \circ x$$

Induktive Definition von Folgen

- Damit kann eine Folge $x \in M^*, x = (x_1, \ldots, x_n)$ schrittweise aufgebaut werden.
- Ausgehend von der leeren Folge $()$ werden die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ angefügt:

$$\begin{aligned} x &= postfix(\ldots postfix(postfix((), x_1), x_2), \ldots, x_n) \\ &= () \circ (x_1) \circ (x_2) \circ \ldots \circ (x_n) \end{aligned}$$

Induktive Definition von Folgen

Induktive Definition von M^*:

1. $() \in M^*$
2. Ist $x \in M^*$ und $a \in M$, dann ist $\mathit{postfix}(x, a) \in M^*$.

Analoge Definition unter Verwendung von *prefix*:

1. $() \in M^*$
2. Ist $a \in M$ und $x \in M^*$, dann ist $\mathit{prefix}(a, x) \in M^*$.

Rekursive Funktionen über Folgen

- Da nun Folgen induktiv definiert sind, liegt es nahe, dass wir sehr einfach rekursive Abbildungen über Folgen definieren können.
- $\mathit{first} : M^+ \to M$ mit $\mathit{first}(\mathit{prefix}(a, x)) = a$
- $\mathit{rest} : M^+ \to M^*$ mit $\mathit{rest}(\mathit{prefix}(a, x)) = x$
- Die Bedeutung dieser Funktionen ist offensichtlich. Für eine nicht leere Folge $(x_1, \ldots, x_n) \neq ()$ gilt:

$$\mathit{first}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$$

$$\mathit{rest}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n)$$

Rekursive Funktionen über Folgen

Die *Projektion* auf Folgen

$$\pi : M^n \times I_n \to M.$$

mit $\pi(x, i) = x_i$ können wir nun auch rekursiv definieren, z.B.:

$$\pi(x, i) = \begin{cases} \mathit{first}(x), & \text{falls } i = 1, \\ \pi(\mathit{rest}(x), i - 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Verallgemeinerung

- Die induktive Struktur von Folgen lässt sich leicht verallgemeinern.
- Jede nicht-leere Folge ist zusammengesetzt aus einem Element $a \in M$ und einer anderen Folge x:

$$y = \mathit{prefix}(a, x)$$

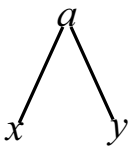
- Abstrahiert von der konkreten Funktion *prefix*, ist y durch das Paar (a, x) bestimmt, wobei x selbst wieder derartig bestimmt ist.
- Eine Verallgemeinerung kann darin bestehen, dass wir Objekte einführen, die aus einem Element a und mehreren "Resten" bestehen:

$$(a, x, y)$$

- Hierbei gilt induktiv, dass die "Reste" x und y selbst von der gleichen Art sind.

Binärbäume

- Solche Objekte heißen *Binärbäume* (über M).
- Analog zu den Folgen lassen wir den *leeren Baum* zu, den wir mit ε bezeichnen.
- Induktive Definition der Menge $binarytree_M$ der Binärbäume über M:
  1. $\varepsilon \in binarytree_M$
  2. Wenn $a \in M$ und $x, y \in binarytree_M$, dann ist $(a, x, y) \in binarytree_M$.
- Hierbei heißt a *Wurzel*, x *linker Teilbaum*, y *rechter Teilbaum* eines Binärbaumes (a, x, y).
- Ein Binärbaum der Gestalt $(a, \varepsilon, \varepsilon)$ heißt *Blatt*.
- Ein von ε verschiedener Binärbaum heißt *nicht-leer*.
- Es ist auch üblich, Bäume graphisch darzustellen. Die kanonische Darstellung für (a, x, y) ist:

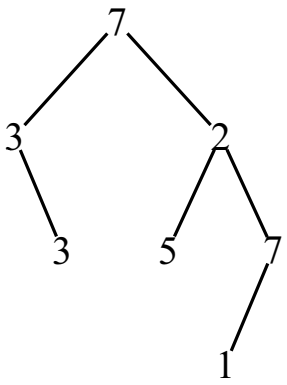


Binärbäume

- Beispiel: Das Objekt

$$(7, (3, \varepsilon, (3, \varepsilon, \varepsilon)), (2, (5, \varepsilon, \varepsilon), (7, (1, \varepsilon, \varepsilon), \varepsilon)))$$

  ist ein Binärbaum über $\mathbb{N}_0$.
- Graphisch:



- Die Wurzel des Baumes und die Wurzeln von Teilbäumen (linker bzw. rechter Unterbaum) sind *Knoten*.

Rekursive Funktionen über Binärbäumen

- Entsprechend der induktiven Definition lassen sich auch leicht wieder rekursive Funktionen über Binärbäumen definieren, die auf die einzelnen Elemente zugreifen:
- $root : binarytree_M \setminus \{\varepsilon\} \to M$
  mit $root(a,x,y) = a$
- $left : binarytree_M \setminus \{\varepsilon\} \to binarytree_M$
  mit $left(a,x,y) = x$
- $right : binarytree_M \setminus \{\varepsilon\} \to binarytree_M$
  mit $right(a,x,y) = y$

Rekursive Funktionen über Binärbäumen

Damit können wir z.B. die Anzahl der Knoten bestimmen:

$$nodes : binarytree_M \to \mathbb{N}_0$$

$$nodes(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z = \varepsilon, \\ 1 + nodes(left(z)) + nodes(right(z)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schlussbemerkung

- Ein Binärbaum besteht letztlich aus der Multimenge seiner Knoten.
- Auch Folgen bestehen aus der Multimenge ihrer Elemente.
- In beiden Fällen sind die Multimengen in bestimmter Weise angeordnet. Dadurch enthalten sowohl Folgen als auch Bäume mehr Information als die Multimengen ihrer Elemente bzw. Knoten.
  - Bei Folgen sind die Elemente *linear* angeordnet.
  - Bäume beschreiben eine *verzweigte* Struktur der Elemente der Multimenge der Knoten.