# Abschnitt 3: Mathematische Grundlagen

3. Mathematische Grundlagen
3.1 Mengen und Abbildungen
3.2 Induktion und Rekursion
3.3 Ausdrücke



# Überblick

3. Mathematische Grundlagen
3.1 Mengen und Abbildungen
3.2 Induktion und Rekursion
3.3 Ausdrücke

# Mengen

- Die Charakterisierung von Daten in der Vorlesung setzt den Mengen-Begriff voraus.
- Als informelle Definition genügt uns:

  Eine *Menge* $M$ ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den *Elementen* der Menge. Die Notation $a \in M$ bedeutet: $a$ ist ein Element der Menge $M$.
- Eine Menge kann beliebig viele Elemente enthalten, also z.B. auch gar keine. In diesem Fall spricht man von der leeren Menge, geschrieben $\emptyset$ oder $\{\}$.



# Mengen

- Eine Menge kann z.B. *extensional* durch Aufzählung der Elemente definiert werden.
- Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle.
- Man kann eine Menge aber auch *intensional* definieren, d.h. durch Angabe einer Bedingung, die alle Elemente und nur die Elemente der Menge erfüllen.
- Beispiel: Menge $M$ der Quadratzahlen, die kleiner als 30 sind
  - Extensional: $M = \{1, 4, 9, 16, 25\} = \{4, 1, 9, 25, 16\}$
  - Intensional: $M = \{a | a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl und } a < 30\}$
- Beispiel leere Menge:
  - Extensional: $M = \{\}$
  - Intensional: $M = \{a | a \in \mathbb{N}, a < 2 \text{ und } a > 1\}$

# Eigenschaften von Mengen

- Alle Elemente einer Menge sind verschieden.
- Man könnte zwar eine Menge $\{1, 2, 2, 3\}$ angeben, dies wäre aber redundant. Die gleiche Menge wird durch $\{1, 2, 3\}$ definiert.
- Mit dem Konzept einer Menge kann man also nicht mehrfaches Vorkommen eines gleichen Elementes (Wertes) modellieren.
- Hierzu dient z.B. das Konzept der Multimengen, die wie Mengen geschrieben werden, aber andere Eigenschaften und Rechenregeln haben.
- Soll auch die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielen, sind Folgen eine geeignete Modellierung (wie wir sie in den Algorithmen in Kapitel 2 verwendet haben).



# Eigenschaften von Mengen

- Es gelten folgende wichtige Eigenschaften von Mengen und Beziehungen zwischen Mengen:

| Bezeichnung | Notation | Bedeutung |
|---|---|---|
| $M$ ist Teilmenge von $N$ | $M \subseteq N$ | aus $a \in M$ folgt $a \in N$ |
| $M$ ist echte Teilmenge von $N$ | $M \subset N$ | es gilt $M \subseteq N$ und $M \neq N$ |
| Vereinigung von $M$ und $N$ | $M \cup N$ | $\{x \mid x \in M$ oder $x \in N\}$ |
| Schnittmenge von $N$ und $M$ | $M \cap N$ | $\{x \mid x \in M$ und $x \in N\}$ |
| Differenz $M$ ohne $N$ | $M \setminus N$ | $\{x \mid x \in M$ und $x \notin N\}$ |
| $M$ und $N$ sind disjunkt | $M \cap N = \emptyset$ | $M$ und $N$ haben keine gemeinsamen Elemente |
| Kardinalität einer Menge $M$ | $\|M\|$ | Anzahl der Elemente von $M$ |

# Tupel, kartesisches Produkt von zwei Mengen

- Die Elemente einer Menge können selbst zusammengesetzt sein aus verschiedenen Mengen.
- Ein *geordnetes Paar (Tupel)* $(x, y)$ besteht aus zwei Werten $x$ und $y$, wobei $x$ die erste und $y$ die zweite Komponente ist.
- Beispiel: Eine Spielkarte hat eine Farbe und ein Symbol: *(Karo,Bube)*, *(Herz,Dame)*.
- Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen $M$ und $N$ ist die Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus $M$ und zweiter Komponente aus $N$:

$$M \times N := \{(x, y) | x \in M \text{ und } y \in N\}.$$

- Beispiel: Für $S = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass\}$ und $F = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$, können wir ein Kartenspiel als die Menge $F \times S$ definieren.



# $n$-Tupel, kartesisches Produkt von $n$ Mengen

- Die Konzepte “Tupel” und “kartesisches Produkt zweier Mengen” lassen sich leicht auf eine beliebige Anzahl $n$ von Mengen verallgemeinern.
- Das allgemeine kartesische Produkt über $n$ Mengen ist die Menge aller geordneten $n$-Tupel mit den Komponenten aus diesen Mengen:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in M_1 \text{ und } a_2 \in M_2 \ldots \text{ und } a_n \in M_n\}.$$

- Sind alle Mengen identisch ($M_i = M_j$ für alle $1 \leq i, j \leq n$), schreibt man für $M \times M \times \ldots \times M$ häufig auch $M^n$.

# Potenzmenge

- Viele Objekte werden durch Mengen beschrieben.
- Der Wertebereich einer Datenmenge solcher Objekte ist dann eine Menge, die Mengen enthält.
- Eine spezielle Form solcher Mengen von Mengen ist die *Potenzmenge*:
- Die Potenzmenge einer Grundmenge $U$ ist die Menge aller Teilmengen von $U$, geschrieben $\wp(U)$.
- Beispiel: $U = \{d, f, s\}$
  $\wp(U) = \{\emptyset, \{d\}, \{f\}, \{s\}, \{d, f\}, \{d, s\}, \{f, s\}, \{d, f, s\}\}$
- Für eine Menge der Kardinalität *n*, welche Kardinalität hat ihre Potenzmenge?



# Potenzmenge

- Anwendungsbeispiel: Modellieren der Lösungsmenge einer Aufgabe.
- Aufgabe: Anzahl der Münzen, die nötig sind, einen bestimmten Geldbetrag auszuzahlen.
- Je nach Geldbetrag und den Werten der verfügbaren Münzarten gibt es keine, eine oder mehrere Zahlen als Antwort.
- Der Wertebereich der prinzipiell möglichen Lösungen ist $\wp(\mathbb{N})$.

# Relationen

- Eine *n-stellige Relation* ist eine Menge von $n$-Tupeln.
- Prädikate wie z.B. die Beziehung "kleiner" ($a < b$) sind Beispiele für Relationen. Wir können also z.B. schreiben:
  - $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $(1, 2) \in <$
  - $(2, 1) \notin <$
- Eine Relation $R$ ist *erfüllt* (oder *wahr*) für alle Tupel $a$ mit $a \in R$ und nur für diese Tupel. Man schreibt auch: $Ra$.
- Für zweistellige Relationen schreibt man auch $xRy$ (z.B.: $x < y$).



# Eigenschaften zweistelliger Relationen

Sei $R \subseteq M \times M$ (d.h. $R \in \wp(M \times M)$).

- $R$ ist reflexiv, wenn für alle $x \in M$ gilt: $xRx$.
- $R$ ist symmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $xRy$ folgt $yRx$.
- $R$ ist antisymmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus $xRy$ und $yRx$ folgt $x = y$.
- $R$ ist transitiv, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: aus $xRy$ und $yRz$ folgt $xRz$.
- $R$ ist alternativ, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy$ oder $yRx$.

# Äquivalenzrelation

- Sei $R \in \wp(M \times M)$.
- $R$ ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn $R$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Beispiel: Wenn für ein Kartenspiel $F \times S$ mit $S = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass\}$ und $F = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$ beim Vergleich zweier Karten die Farbe keine Rolle spielt, sondern zwei Karten mit dem gleichen Symbol als gleich gelten, ist die entsprechende Äquivalenzrelation:

$$\{((f_1, s_1), (f_2, s_2)) \mid f_1 \in F, f_2 \in F, s_1 \in S, s_2 \in S, s_1 = s_2\}$$



# Ordungsrelationen

Bestimmte Kombinationen von Eigenschaften qualifizieren eine Relation zur *Ordnungsrelation*, durch deren Anwendung man beispielsweise eine Menge sortieren könnte:
Sei $R \in \wp(M \times M)$.

- $R$ ist eine partielle Ordnung, wenn $R$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- $R$ ist eine totale Ordnung, wenn $R$ eine alternative partielle Ordnung ist.

Auf den ganzen Zahlen gibt es die Ordnungsrelation $\leq \in \wp(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Ist diese Ordnungsrelation total?

# Funktionen (Abbildungen)

- Eine *Funktion* ist eine Abbildung von einer bestimmten Menge auf eine bestimmte Menge.
- Funktionen können wir als Relationen mit speziellen Eigenschaften auffassen, sie stellen nämlich eine *rechtseindeutige* Beziehung zwischen Definitionsbereich und Bildbereich dar.
- Formal gesehen ist eine Funktion $f$ eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times B$, für die gilt: Aus $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$ folgt $y = z$, d.h. einem Element aus $D$ ist höchstens ein Element aus $B$ eindeutig zugeordnet.
- Die Menge $D$ heißt *Definitionsbereich* von $f$.
- Die Menge $B$ heißt *Bildbereich* von $f$.
- Als Schreibweisen sind gebräuchlich:

$$(x, y) \in f \iff y = f(x) \iff f(x) = y \iff f : x \mapsto y$$



# Signatur von Funktionen

Da Funktionen spezielle Relationen sind, stammen sie aus Wertebereichen, die Teilmengen der Wertebereiche entsprechend strukturierter Relationen sind:

- Die Menge $D \rightarrow B$ ist die Menge aller Funktionen, die $D$ als Definitionsbereich und $B$ als Bildbereich haben. $D \rightarrow B$ enthält als Elemente alle Mengen von Tupeln $(d, b) \in (D \times B)$, die Funktionen sind.
- Es gilt: $D \rightarrow B \subseteq \wp(D \times B)$.
- Für eine Funktion $f \in D \rightarrow B$ gilt: $f \subseteq D \times B$.
- Man schreibt: $f : D \rightarrow B$, d.h. $f$ hat die *Signatur* $D \rightarrow B$.
- “Signatur” ist ein zentrales Konzept in der Spezifikation von Programmen.

# Eigenschaften von Funktionen

- Eine Funktion $f : D \to B$ ist
  - *total*, wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;
  - *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;
  - *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;
  - *bijektiv*, wenn $f$ zugleich surjektiv und injektiv ist.
- Man sagt auch, eine Funktion ist *partiell*, wenn es gleichgültig ist, ob sie total ist oder nicht.
- Vorsicht: Wenn ein Mathematiker nicht angibt, ob eine Funktion total oder partiell ist, meint er in der Regel eine totale Funktion. Für einen Informatiker ist die partielle Funktion der Normalfall.



# Stelligkeit von Funktionen

- Funktionen aus $D \to B$ sind $n$-stellig, wenn der Definitionsbereich $D$ eine Menge von $n$-Tupeln ist.
- Ist $D$ nicht als kartesisches Produkt strukturiert, so sind die Funktionen aus $D \to B$ 1-stellig, wenn $D$ nicht leer ist, und 0-stellig, wenn $D$ leer ist.
- 0-stellige Funktionen sind *konstante Funktionen*, kurz *Konstanten*, für jeweils einen Wert aus $B$, d.h. jeder Wert $b$ aus $B$ ($b \in B$) kann als 0-stellige Funktion $b : \emptyset \to B$ aufgefasst werden.
- In diesem Sinne kann man den Ausdruck $1 + 2$ als Verschachtelung von mehreren Funktionen auffassen:
  - $1 : \emptyset \to \mathbb{N}$
  - $2 : \emptyset \to \mathbb{N}$
  - $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

# Nocheinmal: Schreibweisen

- Die Notation $f(x_1, \ldots, x_n)$, die die "Anwendung" von $f$ auf die Argumente $x_1, \ldots, x_n$ beschreibt, nennen wir *Funktionsschreibweise*.
- Bei 2-stelligen Funktionen verwendet man häufig auch die *Infixschreibweise* $x_1 f x_2$.
  Beispiel: $17 + 8$ statt $+(17, 8)$ für die Addition.
- Bei 1-stelligen Funktionen verwendet man gerne die *Präfixschreibweise* $f x_1$.
  Beispiel $\log 13$ statt $\log(13)$ für die Logarithmusfunktion.
- Manchmal ist jedoch auch die *Postfixschreibweise* $x_1 \ldots x_n f$ gebräuchlich.
  Beispiel: $21!$ statt $!(21)$ für die Fakultätsfunktion.
- Bemerkung: In der Mathematik gibt es Schreibweisen, die sich nicht direkt einer dieser Schreibweisen unterordnen lassen, z.B. $\sqrt{x}$ (Quadratwurzel), $x^y$ (Potenzierung), $\frac{x}{y}$ (Division).



# Prädikate

- Ein *Prädikat* ist eine Funktion aus $D \to \mathbb{B}$ wobei $\mathbb{B} = \{TRUE, FALSE\}$.
- Prädikate sind also eine Abbildung auf die Menge der booleschen Werte, d.h. der Bildbereich dieser Funktionen ist $\mathbb{B}$.
- Beipiel:
  $=: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$ ist ein Prädikat (die Gleichheitsrelation auf $\mathbb{Z}$).
  Es ist z.B.
  $$= (-321, -321) = TRUE$$
  oder anders ausgedrückt
  $$= (-321, -321) \mapsto TRUE$$
- Wir lassen als Schreibweise "$= TRUE$" meist weg und schreiben bei 2-stelligen Prädikaten in Infixschreibweise
  $$-321 = -321.$$

# Folgen

- Eine *Folge* $(x_1, \ldots, x_n)$ der Länge $n$ über die Elemente einer Menge $M$ (d.h. $x_i \in M$) ist ein $n$-Tupel von Werten aus $M$, d.h.

$$(x_1, \ldots, x_n) \in M^n.$$

- Eine Folge $x \in M^0$ der Länge $n = 0$ wird leere Folge genannt.
- Die Menge aller nicht-leeren Folgen über $M$ wird meist mit

$$M^+ = M^1 \cup M^2 \cup M^3 \cup \ldots$$

  bezeichnet.
- Die Menge aller Folgen (auch leerer) über $M$ ist dann

$$M^* = M^0 \cup M^+.$$

- Die Länge einer Folge $x$ wird auch mit $|x|$ bezeichnet.



# Folgen

- Die Konkatenation $\circ$ aus dem vorherigen Kapitel ist damit formal eine Abbildung

$$\circ : M^* \times M^* \rightarrow M^*.$$

- Für eine formale Definition von $\circ$ benötigen wir zunächst noch die *Projektion*, eine Abbildung

$$\pi : M^n \times I_n \rightarrow M.$$

- Die Menge $I_n = \{i | i \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq i \leq n\}$ heißt *Indexmenge*.
- Die Abbildung $\pi$ bildet eine Folge $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Länge $n$ und ein $i$ ($1 \leq i \leq n$) auf die $i$-te Komponente $x_i$ der Folge ab.
- Beispiel: $x = (4, 5, 6)$

  $\pi(x, 1) = 4$, $\pi(x, 2) = 5$, $\pi(x, 3) = 6$.

# Folgen

- Offensichtlich ist auch $x = (\pi(x,1), \dots, \pi(x,|x|))$ eine alternative Schreibweise für eine Folge $x$.
- Damit können wir die Konkatenation $\circ$ wie folgt formal definieren:

$$x \circ y = (\pi(x,1), \dots, \pi(x,|x|), \pi(y,1), \dots, \pi(y,|y|)),$$

oder anders ausgedrückt:

$$\pi((x \circ y), i) = \begin{cases} \pi(x,i) & \text{für } 1 \leq i \leq |x| \\ \pi(y, i - |x|) & \text{für } |x| + 1 \leq i \leq |x| + |y| \end{cases}$$

- Beispiel: Sei $M = \mathbb{N}_0$ und $x = (7,0,3,18), y = (21,3,7)$, dann ist

$$x \circ y = (\pi(x,1), \pi(x,2), \pi(x,3), \pi(x,4), \pi(y,5-4), \pi(y,6-4), \pi(y,7-4))$$

$$= (7,0,3,18,21,3,7).$$