Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Matthias Schubert
Gregor Jossé

München, 23.06.2015

Managing Massive Multiplayer Online Games

SS 2016

Übungsblatt 8: Zeitliche Verhaltensmodelle

Besprechung: 23.06.2016

Aufgabe 8-1 *HMM: Evaluierung / Erkennung*

Gegeben Sei das Hidden Markov Modell (HMM) $M = \{S, B, D, F\}$ mit $S = \{A, B, C\}$, $B = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$,

$$D = \begin{pmatrix} \times & - & A & B & C \\ - & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ A & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ B & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ C & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \times & \clubsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ A & 1/4 & 3/4 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung $\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit$ ohne algorithmisches Vorgehen. Kennzeichnen Sie die wahrscheinlichste Zustandssequenz für die Beobachtung.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der Beobachtung $\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit$ induktiv mithilfe der Forward-Variablen

$$\alpha_j(1) = d_{-,j} f_{j,o_1} \quad \alpha_j(t+1) = \left(\sum_{i=1}^{|A|} \alpha_i(t) d_{i,j} \right) f_{j,o_{t+1}}$$

(c) Bestimmen Sie mithilfe des Viterbi-Algorithmus die Zustandssequenz, die mit höchster Wahrscheinlichkeit die Beobachtung $\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit$ erzeugt hat.

$$\delta_j(1) = d_{-,j} f_{j,o_1} \quad \delta_j(t+1) = \big(\max_i \delta_i(t) d_{i,j}\big) f_{j,o_{t+1}}$$
$$\psi_j(1) = 0 \quad \psi_j(t+1) = \arg\max_i \delta_i(t) d_{i,j}$$

(a)

$$\begin{aligned} P(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit) &= P(AAB)P(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit \mid AAB) + P(AAC)P(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit \mid AAC) + P(ACB)P(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit \mid ACB) \\ &= (\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4})(\frac{1}{4}\frac{1}{3}1) + (\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4})(\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{4}) + (\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2})(\frac{1}{4}\frac{1}{4}1) \\ &= 1/192 \cdot 3/16 + 1/192 \cdot 9/64 + 1/96 \cdot 1/16 = 1/1024 + 3/4096 + 1/1536 \\ &= 29/12288 \approx 0.00236 \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichste Zustandssequenz für die Beobachtung ist AAB.

(b)

$$
\begin{aligned}
\alpha_A(1) &= 1/3 \cdot 1/4 = 1/12 \\
\alpha_B(1) &= 0 \\
\alpha_C(1) &= 0 \\
\hline
\alpha_A(2) &= 1/12 \cdot 1/4 \cdot 3/4 = 1/64 \\
\alpha_B(2) &= 1/12 \cdot 1/4 \cdot 0 = 0 \\
\alpha_C(2) &= 1/12 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/192 \\
\hline
\alpha_A(3) &= 1/64 \cdot 1/4 \cdot 0 + 1/192 \cdot 1/4 \cdot 0 = 0 \\
\alpha_B(3) &= 1/64 \cdot 1/4 \cdot 1 + 1/192 \cdot 1/2 \cdot 1 = 5/786 \\
\alpha_C(3) &= 1/64 \cdot 1/4 \cdot 3/4 + 1/192 \cdot 0 \cdot 3/4 = 3/1024 \\
\hline
&\Rightarrow P(\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit) = 5/786 \cdot 1/4 + 3/1024 \cdot 1/4 = 29/12288
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{array}{lr}
\delta_A(1) = 1/12 & \psi_A(1) = 0 \\
\delta_B(1) = 0 & \psi_B(1) = 0 \\
\delta_C(1) = 0 & \psi_C(1) = 0 \\
\hline
\delta_A(2) = \max\{1/12 \cdot 1/4, 0 \cdot 1/4, 0 \cdot 1/4\} \cdot 3/4 = 1/64 & \psi_A(2) = A \\
\delta_B(2) = 1/12 \cdot 1/4 \cdot 0 = 0 & \psi_B(2) = A \\
\delta_C(2) = 1/12 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/192 & \psi_C(2) = A \\
\hline
\delta_A(3) = \max\{1/64 \cdot 1/4, 1/192 \cdot 1/4\} \cdot 0 = 0 & \psi_A(3) = A \\
\delta_B(3) = \max\{1/64 \cdot 1/4, 1/192 \cdot 1/2\} \cdot 1 = 1/256 & \psi_B(3) = A \\
\delta_C(3) = \max\{1/64 \cdot 1/4, 1/192 \cdot 0\} \cdot 3/4 = 3/1024 & \psi_C(3) = A \\
\hline
\delta(4) = \max\{1/256 \cdot 1/4, 3/1024 \cdot 1/4\} \approx \max\{0.0009766, 0.0007324\} & \psi(4) = B \\
\Rightarrow \arg\max P(S_1 S_2 S_3 \mid \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit) = AAB &
\end{array}
$$