Ludwig-Maximilians-Universität München 10.06.2014
Institut für Informatik
Prof. Dr. Volker Tresp
Gregor Jossé

Maschinelles Lernen und Data Mining

Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Besprechung des Übungsblattes am 12.06.2014

Aufgabe 6-1 Bestimmung der optimal-trennenden Hyperebene

Bestimmen Sie die optimale, separierende Hyperebene des zwei-Klassen-Datensatzes (A,B) mit:

$$A = \left\{ p_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B = \left\{ p_6 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, p_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Klassenlabels y der Klasse A sind deklariert mit 1, die von B mit -1.

Visualisieren Sie das Ergebnis und geben Sie die Supportvektoren an. Wie breit ist die Margin?

Aufgabe 6-2 Lagrange Multiplikatoren

Wir betrachten ein Optimierungsproblem auf $x \in \mathbb{R}^n$ der Form $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & f_0(x) & \\ \text{so dass} & f_i(x) \leq 0 & \text{für } i = 1, \dots, m \\ & g_j(x) = 0 & \text{für } j = 1, \dots, p \end{array}$$

f_0 ist die Zielfunktion, f_i und g_j sind Nebenbedingungen (für Ungleichungsbedingungen und exakte Bedingungen). Eine Lagrangefunktion nimmt diese Nebenbedingungen mit in die Zielfunktion auf und optimiert dadurch innerhalb der angegebenen Grenzen:

$$\mathcal{L}(x, \gamma, \lambda) = f_0(x) + \textstyle\sum_{i=1}^m \gamma_i f_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x) ,$$

wobei γ und λ reelle Vektoren, die *Lagrange Multiplikatoren* sind. Sie werden auch als duale Variablen bezeichnet. Alle γ_i müssen ≥ 0 sein, die λ_j sind frei wählbar. In einfacheren Problemen kann man sie jeweils durch Minimierung nach den Zielparametern (also x) eindeutig bestimmen.

Optimieren Sie die folgenden Probleme für $n = 2$ mithilfe eines Lagrange-Termes für Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, deren Summe 20 ist,

a) wenn $x_1 \cdot x_2$ maximal sein soll.

b) wenn $x_1^2 + x_2^2$ minimal sein soll.

c) wenn $e^{-(5x_1 - x_2)^2}$ maximal sein soll.

Stellen Sie hierzu zunächst jeweils den passenden Lagrange-Term auf, und minimieren Sie diesen nach den Zielparametern x_1 und x_2. Danach darf auch wieder die Eingangsbedingung ausgenutzt werden.

Aufgabe 6-3 Minimale Oberfläche

Ein geschlossener Karton soll ein Fassungsvermögen von $36\,\text{cm}^3$ haben. Zusätzlich soll die Breite seiner Grundfläche genau die dreifache Länge der Grundfläche betragen.

Berechnen Sie Länge, Breite und Höhe des Kartons mit der kleinsten Oberfläche.