Ludwig-Maximilians-Universität München 19.05.2014
Institut für Informatik
Prof. Dr. Volker Tresp
Gregor Jossé

Maschinelles Lernen und Data Mining

Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Besprechung des Übungsblattes am 22.05.2014

Aufgabe 4-1 Fußball PCA

Der Caltech 101 Datensatz besteht aus mehr als 9000 Bildern die in 102 Objekt-Kategorien einsortiert wurden. Wir betrachten nun kleinskalierte Bilder ((32×32)-Thumbnails) aus den Klassen `soccer ball` und `Faces easy`.

a) Führen Sie eine PCA auf den 64 `soccer ball` Bildern durch. Können die Bilder mit möglichst wenigen Hauptkomponenten wirklich verlustarm reduziert werden?

b) Wie gut lässt sich der aus 435 Bildern bestehende `Faces easy` Datensatz mit der oben bestimmten Datenzerlegung rekonstruieren?

c) Funktioniert die Rückrichtung (Fußbälle aus Gesichts-Hauptkomponenten rekonstruieren) genau so gut?

Aufgabe 4-2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gegeben seien die folgende Daten über die Zufallsvariablen X und Y:

		Y		
		1	2	3
X	1	0,1	0,15	0,25
	2	0,05	0,3	0,15

Berechnen Sie

a) die Randwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ und $P(Y = y_i)$

b) die Erwartungswerte $E(X)$, $E(Y)$

c) die Varianzen $var(X)$, $var(Y)$, sowie die Kovarianz $cov(X,Y)$.

d) die Korrelation $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$

e) Sind die Variablen X,Y unabhängig?

Aufgabe 4-3 Interpretation der Standardabweichung

Skizzieren Sie den Graph der Standardnormalverteilung $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$; mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ im Intervall $x \in [-4, 4]$. Markieren und interpretieren Sie die Bereiche $0 \pm \sigma;\ 0 \pm 2\sigma;\ 0 \pm 3\sigma$

Aufgabe 4-4 Kernkombinationen

Um einen selbstdefinierten Kern $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ für $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ anzuwenden, muss gezeigt werden, dass es sich auch tatsächlich um einen legitimen Kern handelt. Da es recht aufwendig sein kann zu zeigen, dass für k das *Mercer Theorem* zutrifft, wird häufig explizit das Mapping der impliziten Basistransformationen angegeben: $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \phi(\mathbf{x}_i)^T \phi(\mathbf{x}_j)$.

Eine weitere beliebte Variante, die Gültigkeit einer Kernfunktion zu zeigen, ist die Rückführung auf eine Kombination aus Kernen, da für einige Operationen $\circ$ gilt, dass $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = k_1(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \circ k_2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ ein legitimer Kern ist.

Zeigen Sie, dass für valide Kernfunktionen $k_l(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ mit $l \in \mathbb{N}_+$ gilt:

a) **Skalierung**: Für $a > 0$ ist $k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) := a \cdot k_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ ein Kern.

b) **Summe**: $k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) := k_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) + k_2(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ ist ein Kern.

c) **Linearkombination**: Für $w \in \mathbb{R}^d_+$ ist $k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) := \sum_{l=1}^{d} w_l \cdot k_l(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ ein Kern.

d) **Produkt**: $k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) := k_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) \cdot k_2(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)$ ist ein Kern.

e) **Potenz**: Für ein $p \in \mathbb{N}_+ : k(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) := (k_1(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j))^p$ ist ein Kern.