Lineare Algebra (Review)

Vektoren

- k ist ein skalar
- $\mathbf{b}$ ist ein Spaltenvektor
- b_i ist die i-te Komponente von $\mathbf{b}$
- $\mathbf{b}^T$ ist die transponierte zu $\mathbf{b}$, ein Zeilenvektor

Matrizen

- A ist eine Matrix
- Ist A eine $k \times l$-dimensionale Matrix,
  - dann ist die transponierte A^T eine $l \times k$-dimensionale Matrix
  - die Spalten (Zeilen) von A sind die Zeilen (Spalten) von A^T und umgekehrt

Multiplikation mit einem Skalar

- $\mathbf{c} = k\mathbf{b}$ ist ein Vektor der Dimensionalität von $\mathbf{b}$, mit $c_i = kb_i$
- $C = kA$ ist eine Matrix der Dimensionalität von A, mit $c_{i,j} = ka_{i,j}$

(Inneres) Produkt zweier Vektoren

- Summe über das Produkt der Komponenten zweier (gleich-dimensionaler) Vektoren
- $$\mathbf{b}^T\mathbf{c} = \sum_{m=1}^{l} b_m c_m$$

  ist ein Skalar

Multiplikation von zwei Matrizen

- Seien A eine $k \times l$-dimensionale Matrix und C eine $l \times p$-dimensionale Matrix
- Dann ist $D = AC$ eine eine $k \times p$-dimensionale Matrix mit

$$d_{i,j} = \sum_{m=1}^{l} a_{i,m} c_{m,j}$$

Multiplikation von zwei Matrizen (2)

- Spezialfall: **Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ist ein Skalar**. Sind $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zwei $l-$dimensionale Spaltenvektoren, dann ist

$$\mathbf{b}^T\mathbf{c} = \sum_{m=1}^{l} b_m c_m$$

- Spezialfall: **Multiplikation eines Spaltenvektor mit einem Zeilenvektors ist eine Matrix**. Ist $\mathbf{b}$ ein k-dimensionaler Vektor und $\mathbf{c}$ ein p-dimensionaler Vektor, dann ist

$$A = \mathbf{b}\mathbf{c}^T$$

  ist eine $k \times p$ Matrix mit $a_{i,j} = b_i c_j$

Multiplikation von zwei Matrizen (3)

- Spezialfall: **Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ist ein Spaltenvektor**. Ist A eine $k \times l$-dimensionale Matrix und ist $\mathbf{b}$ ein l-dimensionaler Vektor, dann ist

$$\mathbf{c} = A\mathbf{b}$$

ein k-dimensionaler Vektor mit $c_i = \sum_{m=1}^{l} a_{i,m} b_m$

- Spezialfall: **Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix mit ist ein Zeilenvektor**. Ist A eine $k \times l$-dimensionale Matrix und ist $\mathbf{b}$ ein k-dimensionaler Vektor und sei

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T A$$

Dann ist $\mathbf{c}$ ein l-dimensionaler Vektor mit $c_i = \sum_{m=1}^{k} b_m a_{m,i}$

Rechenregel für Transponierte einer Matrix

- $$\left(A^T\right)^T = A$$

- $$(AB)^T = B^T A^T$$

Einheitsmatrix

- $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix Inverse

- Sei A eine quadratische Matrix
- Wenn eine eindeutige inverse Matrix A^{-1} existiert, dann gilt

$$A^{-1}A = I \quad AA^{-1} = I$$

- Ebenso, falls die entsprechenden Inversen existieren $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Orthogonale Matrizen

- **Orthogonale Matrix (genauer: Orthonormale Matrix)**: R ist eine (quadratische) orthogonale Matrix, wenn alle Spalten orthonormal sind. Daraus folgt, dass ebenso alle Zeilen orthonormal sind, und

$$R^T R = I \qquad R R^T = I \qquad R^{-1} = R^T \tag{1}$$