Einige Konzepte aus der Wahrscheinlichkeitstheorie (Wiederh.)

Zusammenfassung

- Bedingte Verteilung:

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} \quad \text{mit} \quad P(x) > 0$$

- Produktsatz

$$P(x,y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- Kettenregel

$$P(x_1, \ldots, x_M) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1,x_2)\ldots P(x_M|x_1,\ldots,x_{M-1})$$

- Satz von Bayes

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} \quad P(x) > 0$$

- Marginale (Rand-) Verteilungen

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

- Zwei Zufallsvariablen sind unabhängig, falls gilt,

$$P(x, y) = P(x)P(y|x) = P(x)P(y)$$

Diskrete Zufallsvariablen (Random variables)

- Eine **Zufallsvariable** $X(c)$ ist eine Variable (genauer eine Funktion), deren Wert vom Ergebnis c eines Zufallsprozesses abhängt
- Eine diskrete Zufallsvariable X kann nur abzählbar viele Zustände $\{x_1, x_2, \ldots\}$ annehmen

Diskrete Zufallsvariablen (2)

- Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** spezifiziert, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Zufallsvariable einen bestimmten Zustand einnimmt
- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X kann durch eine **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $f(x)$ definiert werden:

$$P(X = x) = P(\{c : X(c) = x\}) = f(x)$$

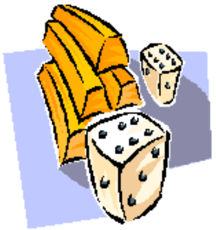
- $f(x)$ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion und x ist eine **Realisierung** von X
- Wir schreiben in der Regel

$$f(x) = P_X(x) = P(x)$$

Elementarereignis

- Elementarereignis: basierend auf grundlegenden Annahmen (Symmetrie, Neutralität der Natur, ...) kann man die Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen angeben

Beispiel: 2 Würfe eines fairen Würfels: Elementarereignisse



6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1. Wurf	1	2	3	4	5	6

- Elementarereignis: Ergebnis zweier Würfe
- $c = \{c_1, c_2\}$: erster Wurf ist c_1, der zweite ist c_2
- Die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist $1/36$

Beispiel: Zufallsvariable X

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1. Wurf	1	2	3	4	5	6

Wir definieren die Zufallsvariable X, so das $X = 0$ falls $c_1 \in \{1, 2, 3\}$ und $X = 1$ anderenfalls. Dann ist:

$$P(X = 0) = P(\{c : X(c) = 0\}) =$$

$$1/36 \times 3 \times 6 = 1/2 = f(0)$$

$$P(X = 1) = P(\{c : X(c) = 1\}) =$$

$$1/36 \times 3 \times 6 = 1/2 = f(1)$$

Beispiel: Zufallsvariable Y

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1.Wurf	1	2	3	4	5	6

Wir definieren die Zufallsvariable Y, so das $Y = 0$ falls $c_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = 1$ anderenfalls. Dann ist:

$$P(Y = 0) = P(\{c : Y(c) = 0\}) =$$

$$1/36 \times 4 \times 6 = 2/3 = f(0)$$

$$P(Y = 1) = P(\{c : Y(c) = 1\}) =$$

$$1/36 \times 2 \times 6 = 1/3 = f(1)$$

Beispiel: Zufallsvariable Z

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1. Wurf	1	2	3	4	5	6

Wir definieren die Zufallsvariable Z, so das $Z = 0$ falls $c_1 + c_2 \leq 5$ und $Z = 1$ anderenfalls. Dann ist:

$$P(Z = 0) = P(\{c : Z(c) = 0\}) =$$

$$1/36 \times 10 = 10/36 = f(0)$$

$$P(Z = 1) = P(\{c : Z(c) = 1\}) =$$

$$1/36 \times 26 = 26/36 = f(1)$$

Kommentare zu Zufallsvariablen

- In der Praxis macht man sich in der Regel keine Gedanken über den zugrundeliegenden Zufallsprozess. Beispiel: Welche Zufallsprozesse liegen der Tatsache zugrunde, dass Menschen verschieden groß und verschieden schwer sind und dass Gewicht und Größe korreliert sind?

- In der Wahrscheinlichkeitstheorie nimmt man Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Zufallsvariablen an und berechnet Eigenschaften, die sich ableiten lassen. Beispiel: Nehmen wir an, die Größe der Menschen ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. ....

- In der Statistik definiert man Zufallszahlen, die einen Bezug zur realen Welt haben und analysiert Zusammenhänge. Beispiel: Hier sind Messungen zu Höhe und Gewicht der Population. Die empirische Korrelation zwischen beiden ist $\mathrm{r} = \ldots$

Multivariate Verteilungen

- Man definiere zwei Zufallsvariablen $X(c)$ und $Y(c)$. Eine multivariate Verteilung ist definiert durch:

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x \land Y = y)$$

$$= P(\{c : X(c) = x \land Y(c) = y\})$$

Beispiel: Multivariate Verteilung X, Y

$Y = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1.Wurf	1	2	3	4	5	6

$X = 1$

$$P(X = 1, Y = 1)$$

$$= P(X = 1 \wedge Y = 1)$$

$$= P(\{c : X(c) = 1 \wedge Y(c) = 1\})$$

$$1/36 \times 6 = 1/6$$

1	1/6	1/6
0	1/3	1/3
Y/X	0	1

Beispiel: Multivariate Verteilung X, Z

$Z = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	2	3	4	5	6

$X = 1$

$$P(X = 1, Z = 1)$$

$$= P(X = 1 \wedge Z = 1)$$

$$= P(\{c : X(c) = 1 \wedge Z(c) = 1\})$$

$$= 17/36$$

1	9/36	17/36
0	9/36	1/36
Z/X	0	1

Bedingte Verteilungen

- *Definition* einer **bedingten Verteilung**

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} \quad \text{mit} \quad P(X = x) > 0$$

Beispiel: Bedingte Verteilung $P(Y|X)$

$Y = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf / 1.Wurf	1	2	3	4	5	6

$X = 1$

$$P(Y = 1|X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(X = 1)}$$

$$= \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

1	1/6	1/6
0	1/3	1/3
Y/X	0	1

Beispiel: Bedingte Verteilung $P(Z|X)$

$Z = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	2	3	4	5	6

$X = 1$

$$P(Z = 1|X = 1) = \frac{P(X = 1, Z = 1)}{P(X = 1)}$$

$$= \frac{17/36}{1/2} = 34/36$$

1	9/36	17/36
0	9/36	1/36
Z/X	0	1

Produktzerlegung und Kettenregel

- Es folgen: **Produktsatz**

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- und die **Kettenregel**

$$P(x_1, \ldots, x_M) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2) \ldots P(x_M|x_1, \ldots, x_{M-1})$$

Satz von Bayes

- **Satz von Bayes**

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} \quad P(x) > 0$$

Beispiel: Satz von Bayes

$$P(X=1|Z=1) = \frac{P(Z=1|X=1)P(X=1)}{P(Z=1)}$$

$$= \frac{34/36 \times 18/36}{26/36} = 17/26$$

$Z=1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1	2	3	4	5	6

$X=1$

1	9/36	17/36
0	9/36	1/36
Z/X	0	1

Marginale Verteilungen

- Da die Ereignisse sich ausschließen,

$$P(X = x) = P(X = x, [Y = y_1 \vee Y = y_2]) =$$

$$P(\{c : X(c) = x \wedge [Y(c) = y_1 \vee Y(c) = y_2]\}) = P(x, y_1) + P(x, y_2)$$

- Daraus folgt, dass sich die **marginale (Rand-) Verteilungen** berechnen lässt zu:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Beispiel: Marginale Verteilung

$Z = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36 $X = 1$
	1	2	3	4	5	6

$$P(X = 1) = P(Z = 0, X = 1) + P(Z = 1, X = 1)$$

$$= 1/36 + 17/36 = 1/2$$

P(Z=1) =(9+17)/36 =26/36	9/36	17/36
P(Z=0) =(9+1)/36= 10/36	9/36	1/36
Z/X	P(X=0) =(9+9)/36 =1/2	P(X=1) =(17+1)/36 =1/2

Unabhängige Zufallsvariablen

- **Unabhängigkeit**: zwei Zufallsvariablen sind unabhängig, falls gilt,

$$P(x, y) = P(x)P(y|x) = P(x)P(y)$$

Beispiel: unabhängige Würfelwürfe.

Beispiel: 2 Würfe eines Würfels

$Y = 1$

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf / 1.Wurf	1	2	3	4	5	6

$X = 1$

$$P(Y = 1, X = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$$

$$= 1/2 \times 2/6 = 1/6$$

1	1/6	1/6
0	1/3	1/3
Y/X	0	1

Erwartungswerte

- **Erwartungswert**

$$E(X) = E_{P(x)}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Beispiel: Erwartungswerte

6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2.Wurf 1. Wurf	1	2	3	4	5	6

$$E(X) = 0 \times 1/2 + 1 \times 1/2 = 1/2$$

$$E(Y) = 0 \times 2/3 + 1 \times 1/3 = 1/3$$

$$E(Z) = 0 \times 10/36 + 1 \times 26/36 = 26/36$$

Varianzen

- Definition der **Varianz** einer Zufallsvariable:

$$var(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

Kovarianzen

- **Kovarianz**:

$$cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_j - E(Y))P(X = x_i, Y = y_j)$$

- **Kovarianzmatrix**:

$$\Sigma_{[XY],[XY]} = \begin{pmatrix} var(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & var(Y) \end{pmatrix}$$

- Falls $cov(X,Y) = 0$, sind X und Y unkorreliert (aber nicht notwendigerweise unabhängig). Aus Unabhängigkeit folgt Unkorreliertheit. Das Inverse gilt nicht!

- Beachte, das gilt:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

wobei man $E(XY)$ als Korrelation bezeichnet. Beachte jedoch, dass der Korrelationskoeffizient definiert ist als

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}}$$

Kontinuierliche (stetige) Zufallsvariablen

- Zufallsvariablen können auch kontinuierlich (stetig) sein. Hier definiert man die **Wahrscheinlichkeitsdichte** als

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

- Man erhält

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

- Die Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = P(X \leq x)$$

Wir werden in der Notation keinen Unterschied machen zwischen einer Wahrscheinlichkeitsfunktion für diskrete Variablen und Wahrscheinlichkeitsdichten für stetige Variablen und schreiben ebenfalls

$$f(x) = P(x)$$

Erwartungswerte für stetige Variablen

- Erwartungswert

$$E(X) = E_{P(x)}(X) = \int xP(x)dx$$

- Varianz

$$var(X) = \int (x - E(x))^2 P(x)dx$$

- Kovarianz:

$$cov(X, Y) = \int (x - E(X))(y - E(Y))P(x, y)dxdy$$