

# Linear Algebra (Review)

## Vektoren

- $k$  ist ein skalar
- $\mathbf{b}$  ist ein Spaltenvektor
- $b_i$  ist die  $i$ -te Komponente von  $\mathbf{b}$
- $\mathbf{b}^T$  ist die transponierte zu  $\mathbf{b}$ , ein Zeilenvektor

# Matrizen

- $A$  ist eine Matrix
- Ist  $A$  eine  $k \times l$ -dimensionale Matrix,
  - dann ist die transponierte  $A^T$  eine  $l \times k$ -dimensionale Matrix
  - die Spalten (Zeilen) von  $A$  sind die Zeilen (Spalten) von  $A^T$  und umgekehrt

## Multiplikation mit einem Skalar

- $\mathbf{c} = k\mathbf{b}$  ist ein Vektor der Dimensionalität von  $\mathbf{b}$ , mit  $c_i = kb_i$
- $C = kA$  ist eine Matrix der Dimensionalität von  $A$ , mit  $c_{i,j} = ka_{i,j}$

## (Inneres) Produkt zweier Vektoren

- Summe über das Produkt der Komponenten zweier (gleich-dimensionaler) Vektoren
- 

$$\mathbf{b}^T \mathbf{c} = \sum_{m=1}^l b_m c_m$$

ist ein Skalar

## Multiplikation von zwei Matrizen

- Seien  $A$  eine  $k \times l$ -dimensionale Matrix und  $C$  eine  $l \times p$ -dimensionale Matrix
- Dann ist  $D = AC$  eine  $k \times p$ -dimensionale Matrix mit

$$d_{i,j} = \sum_{m=1}^l a_{i,m} c_{m,j}$$

## Multiplikation von zwei Matrizen (2)

- Spezialfall: **Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor ist ein Skalar**. Sind  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  zwei  $l$ –dimensionale Spaltenvektoren, dann ist

$$\mathbf{b}^T \mathbf{c} = \sum_{m=1}^l b_m c_m$$

- Spezialfall: **Multiplikation eines Spaltenvektor mit einem Zeilenvektors ist eine Matrix**. Ist  $\mathbf{b}$  ein  $k$ -dimensionaler Vektor und  $\mathbf{c}$  ein  $p$ -dimensionaler Vektor, dann ist

$$A = \mathbf{b} \mathbf{c}^T$$

ist eine  $k \times p$  Matrix mit  $a_{i,j} = b_i c_j$

## Multiplikation von zwei Matrizen (3)

- Spezialfall: **Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ist ein Spaltenvektor**. Ist  $A$  eine  $k \times l$ -dimensionale Matrix und ist  $\mathbf{b}$  ein  $l$ -dimensionaler Vektor, dann ist

$$\mathbf{c} = A\mathbf{b}$$

ein  $k$ -dimensionaler Vektor mit  $c_i = \sum_{m=1}^l a_{i,m} b_m$

- Spezialfall: **Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer Matrix mit ist ein Zeilenvektor**. Ist  $A$  eine  $k \times l$ -dimensionale Matrix und ist  $\mathbf{b}$  ein  $k$ -dimensionaler Vektor und sei

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{b}^T A$$

Dann ist  $\mathbf{c}$  ein  $l$ -dimensionaler Vektor mit  $c_i = \sum_{m=1}^k b_m a_{m,i}$

## Rechenregel für Transponierte einer Matrix

- 

$$\left(A^T\right)^T = A$$

- 

$$(AB)^T = B^T A^T$$

## Einheitsmatrix

- 

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Matrix Inverse

- Sei  $A$  eine quadratische Matrix
- Wenn eine eindeutige inverse Matrix  $A^{-1}$  existiert, dann gilt

$$A^{-1}A = I \quad AA^{-1} = I$$

- Ebenso, falls die entsprechenden Inversen existieren  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## Orthogonale Matrizen

- **Orthogonale Matrix (genauer: Orthonormale Matrix):**  $R$  ist eine (quadratische) orthogonale Matrix, wenn alle Spalten orthonormal sind. Daraus folgt, dass ebenso alle Zeilen orthonormal sind, und

$$R^T R = I \quad R R^T = I \quad R^{-1} = R^T \quad (1)$$