Lösungsvorschlag:

(a) Optimierungsproblem mittels Lagrange:

Achtung: y bezeichnet nicht die Koordinate, sondern die Klasse, d.h. $+1$ bzw. -1.

Gegeben: $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ $y_1 = -1$ $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}^T$ $y_2 = +1$

Wir haben zwei Support Vectors, daher gibt es α_1 und α_2. Da aber $\sum_i \alpha_i y_1 = 0 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ gilt $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$.

Die Formel aus der Vorlesung in Kernel-Schreibweise lautet:

$$L(\vec{\alpha}) := \left(\sum_i \alpha_i\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}^T M \vec{\alpha}\right)$$

Diese Kernel-Schreibweise erlaubt die Verwendung von beliebigen Kerneln!

Mit $M_{ij} := y_i y_j \langle \vec{x_i}, \vec{x_j} \rangle$ (die Summenschreibweise erhält man durch Ausmultiplizieren!)

Wir berechnen die Kernelmatrix und setzen sie ein:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{\alpha}) = 2\alpha - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2\alpha & 4\alpha \end{pmatrix}\right) = 2\alpha - \frac{1}{2}\left(-2\alpha^2 + 4\alpha^2\right) = -\alpha^2 + 2\alpha$$

1. Ableitung: $L'(\vec{\alpha}) = -2\alpha + 2$, Nullstelle $\alpha = 1$.
Ist das gesuchte Maximum, da es sich hier offenbar um eine umgedrehte Parabel handelt.
Daher Lösung: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

(b) Bestimmung des Normalenvektors:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i \cdot \vec{x}_i = 1 \cdot -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmung des Skalars b: Anmerkung: $\min$, $\max$ hier trivial, da je nur ein Support Vector!

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\max_{i, y_i = -1} \langle \vec{w}, \vec{x_i} \rangle + \min_{i, y_i = 1} \langle \vec{w}, \vec{x_i} \rangle}{2} \\ &= -\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{2} \\ &= -\frac{2+4}{2} = -3 \end{aligned}$$

(d) Klassifikation:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}^T \Rightarrow sig\,(3 + 5 - 3) = sig(5) = +1 = y_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}^T \Rightarrow sig\,(0 + 1 - 3) = sig(-2) = -1 = y_1$$

Interpretation der Werte: Normalenvektor $\vec{w}$ ist die Richtung unseres Margins. Der Skalar b gibt uns den Abstand des Ursprunges an; anschaulich geht die Trennebene durch den Punkt $\vec{o}\begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$.
Und siehe da: $\langle \vec{o}, \vec{w} \rangle + b = 3 + -3 = 0$