

Data Mining Tutorial

Outlier Detection

Erich Schubert, Arthur Zimek

Ludwig-Maximilians-Universität München

2015-06-10 — KDD Übung

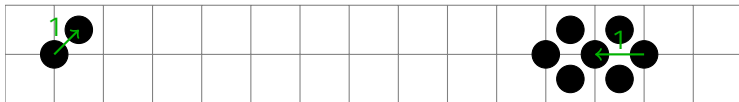
Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Distanz zum nächsten Nachbarn



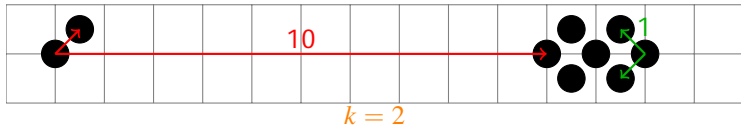
Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Distanz zum nächsten Nachbarn
⇒ übersieht Ausreißer-Paare



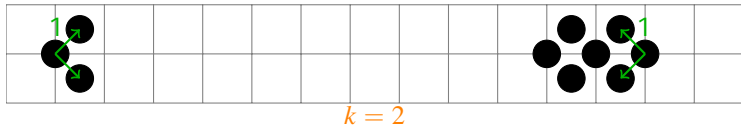
Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Distanz zum k nächsten Nachbarn



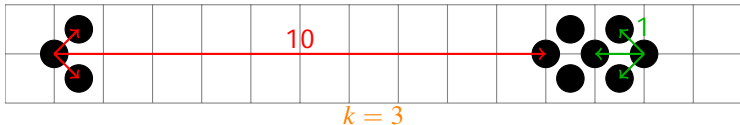
Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Distanz zum k nächsten Nachbarn



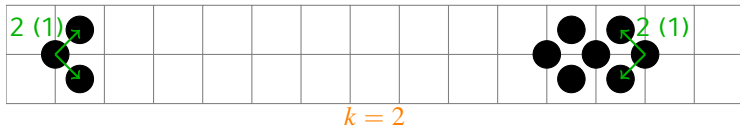
Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Distanz zum k nächsten Nachbarn
⇒ Micro-Cluster ($|C| < k + 1$) werden Ausreißer



Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

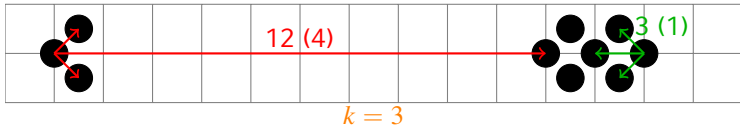
- ▶ Summe der Distanzen zu den k nächsten Nachbarn
Etwas robuster bzgl. k und Micro-Clustern



Distanzbasierte Ausreißer:

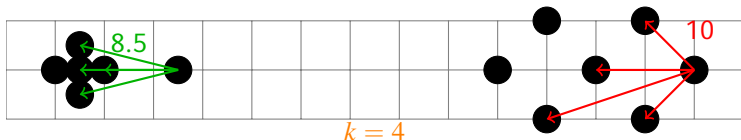
“Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten”

- ▶ Summe der Distanzen zu den k nächsten Nachbarn



Distanzbasierte Ausreißer:
"Ausreißer sind weiter weg von den anderen Daten"

- ▶ Summe der Distanzen zu den k nächsten Nachbarn
⇒ Kann aber nicht gut mit unterschiedlichen Dichten umgehen!



Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im *minPts*-Kern von o ?”

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?”

$$reach-dist_k(p, o) = \max\{k\text{-distance}(o), dist(o, p)\}$$

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?”

$$reach-dist_k(p, o) = \max\{\underbrace{k\text{-distance}(o)}_{kNN \text{ outlier!}}, dist(o, p)\}$$

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?”

$$reach-dist_k(p \leftarrow o) = \max\{k\text{-distance}(o), \text{dist}(o, p)\}$$

Vorsicht: diese “Distanz” ist nicht symmetrisch!
Sie hängt von der Kerngröße des *anderen* Objekts o ab.
Ich bevorzuge die Notation “ p erreichbar von o ”:

$$reach-dist_k(p \leftarrow o)$$

um das zu betonen.

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?”

$$reach-dist_k(p \leftarrow o) = \max\{k\text{-distance}(o), \text{dist}(o, p)\}$$

Lokale Erreichbarkeitsdichte

$$lrd_k(p) = 1 / \left(\frac{\sum_{o \in \mathcal{N}} reach-dist_k(p \leftarrow o)}{|\mathcal{N}|} \right)$$

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
“Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?”

$$reach-dist_k(p \leftarrow o) = \max\{k\text{-distance}(o), \text{dist}(o, p)\}$$

Lokale Erreichbarkeitsdichte

$$lrd_k(p) = 1 / \left(\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}} reach-dist_k(p \leftarrow o) \right)$$

Idee: Ein Ausreißer ist weniger dicht als seine Nachbarn
 Dichteschätzung basierend auf den Ideen der
 Clusteringalgorithmen OPTICS und DBSCAN:
 "Wann wäre ein Objekt p im $minPts$ -Kern von o ?"

$$reach-dist_k(p \leftarrow o) = \max\{k\text{-distance}(o), \text{dist}(o, p)\}$$

Lokale Erreichbarkeitsdichte

$$lrd_k(p) = \underbrace{1/}_{\text{Kehrwert}} \left(\underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{mittlere}} \underbrace{reach-dist_k(p \leftarrow o)}_{\text{Erreichbarkeit von den Nachbarn}} \right)$$

Vorsicht: Division durch 0 (aber nicht bei Ausreißern!)

$$LOF(p) = \frac{\sum_{o \in \mathcal{N}} \frac{Ird_k(o)}{Ird_k(p)}}{|\mathcal{N}|}$$

$$LOF(p) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}} \frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}$$

$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

- ▶ p gleich dicht \Leftrightarrow relative Dichte = 1

$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

- ▶ p gleich dicht \Leftrightarrow relative Dichte = 1
- ▶ p ähnlich dicht \Leftrightarrow relative Dichte \approx 1

$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

- ▶ p gleich dicht \Leftrightarrow relative Dichte = 1
- ▶ p ähnlich dicht \Leftrightarrow relative Dichte \approx 1
- ▶ p weniger dicht \Leftrightarrow relative Dichte $>$ 1

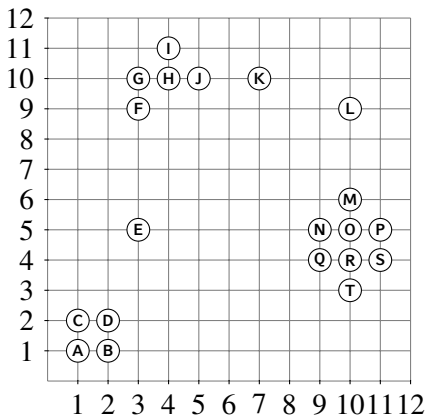
$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

- ▶ p gleich dicht \Leftrightarrow relative Dichte = 1
- ▶ p ähnlich dicht \Leftrightarrow relative Dichte \approx 1
- ▶ p weniger dicht \Leftrightarrow relative Dichte $>$ 1
- ▶ $LOF(p) \gg 1$ für Ausreißer!

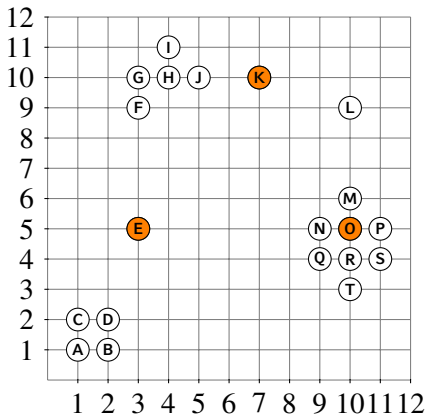
$$LOF(p) = \underbrace{\frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{o \in \mathcal{N}}}_{\text{Mittlere}} \underbrace{\frac{lrd_k(o)}{lrd_k(p)}}_{\text{relative Dichte (der Nachbarn!)}}$$

- ▶ p gleich dicht \Leftrightarrow relative Dichte = 1
- ▶ p ähnlich dicht \Leftrightarrow relative Dichte \approx 1
- ▶ p weniger dicht \Leftrightarrow relative Dichte $>$ 1
- ▶ $LOF(p) \gg 1$ für Ausreißer!

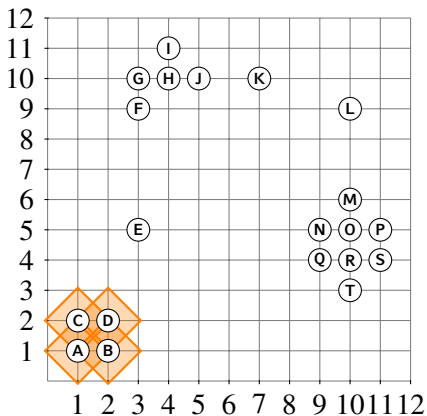
Hinweis: Dichte im Sinne von OPTICS/DBSCAN!
Die Erreichbarkeitsdistanz (lrd) wird oft übersehen!



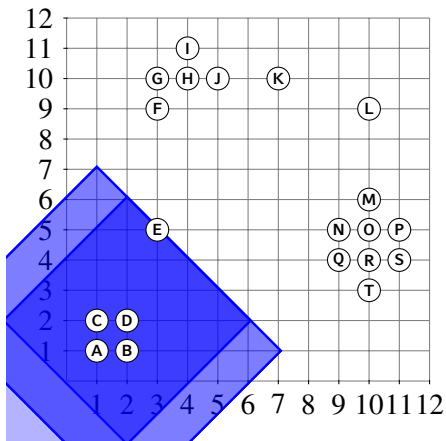
	2NN	2d.	4NN	4d.
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



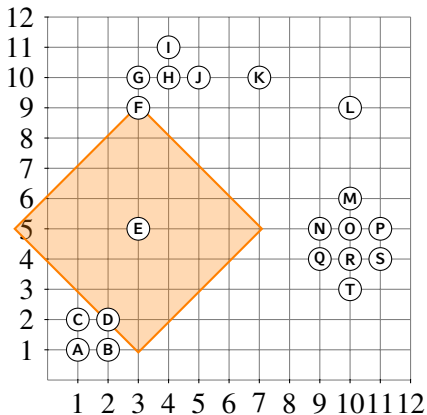
	2NN	2d.	4NN	4d.
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



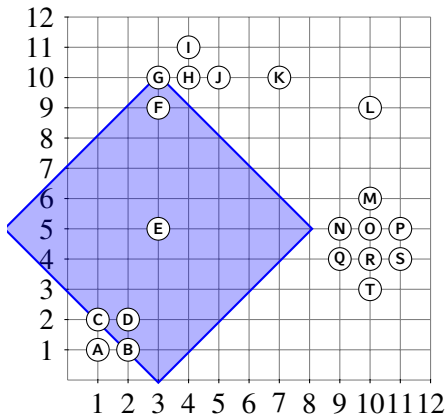
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	B C	1		
B	A D	1		
C	A D	1		
D	B C	1		
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



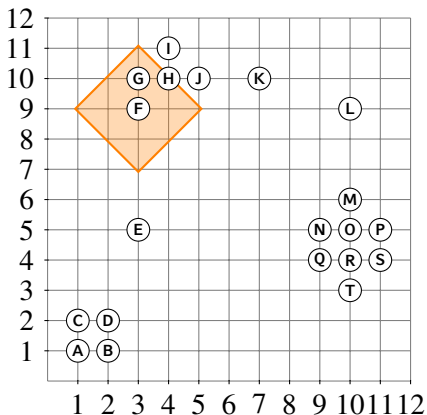
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



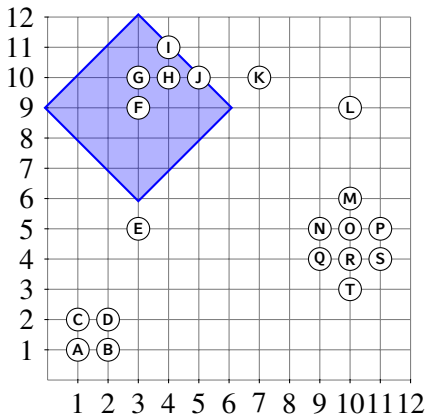
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4		
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



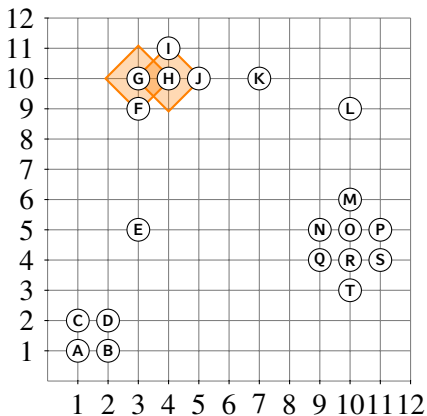
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



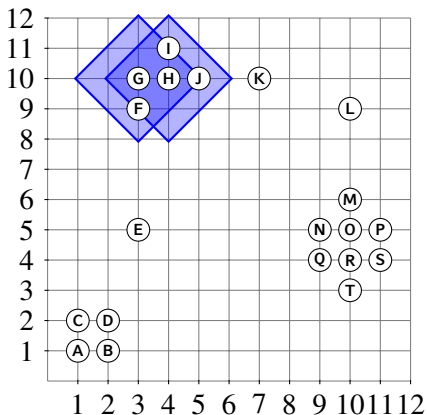
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2		
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



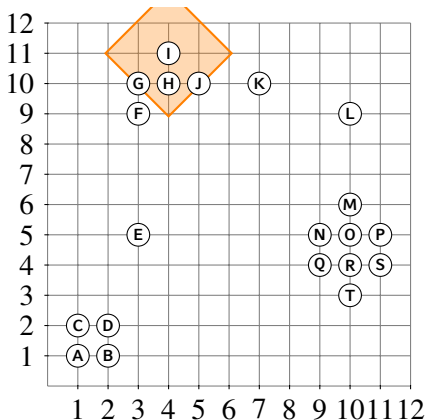
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



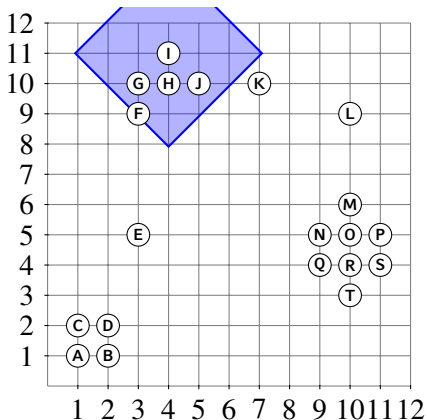
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1		
H	GIJ	1		
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



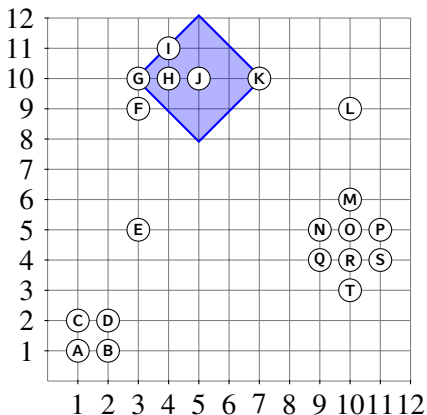
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



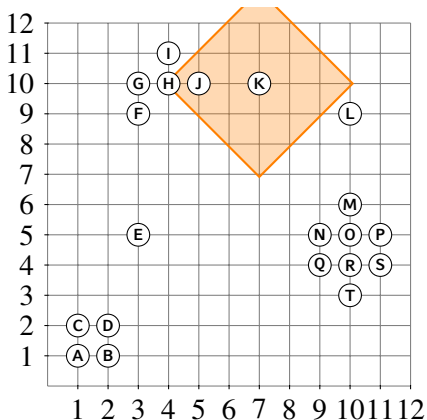
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2		
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



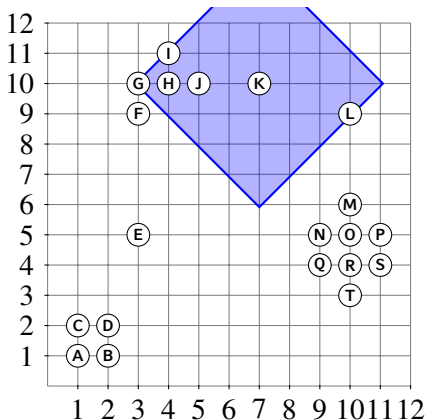
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



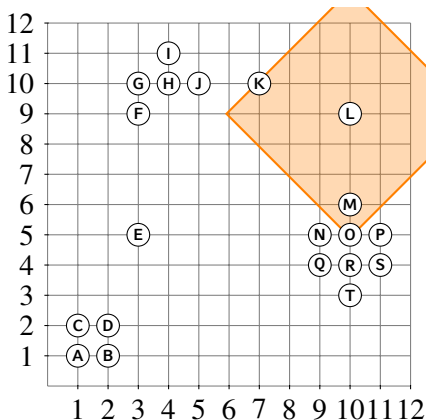
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



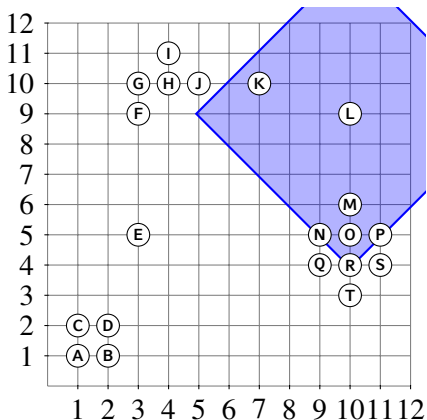
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3		
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



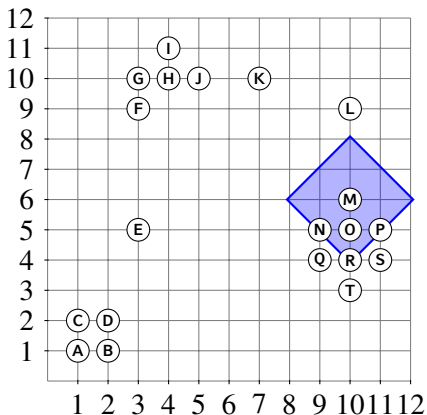
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



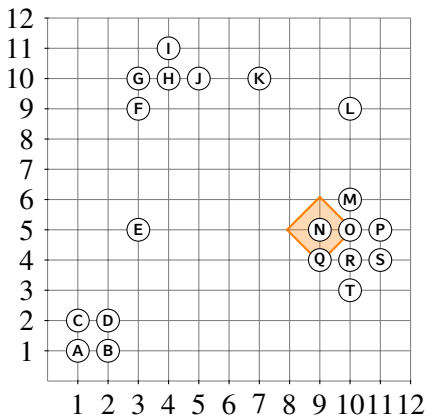
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4		
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



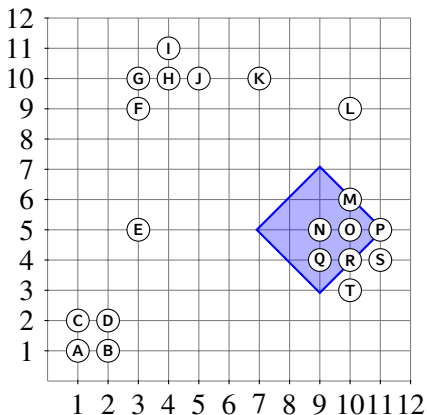
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



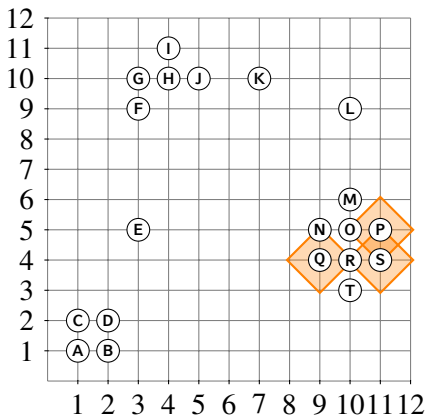
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



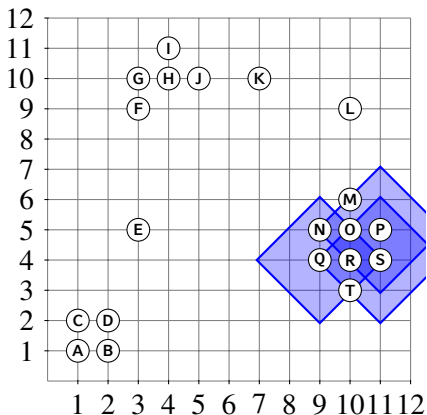
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1		
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



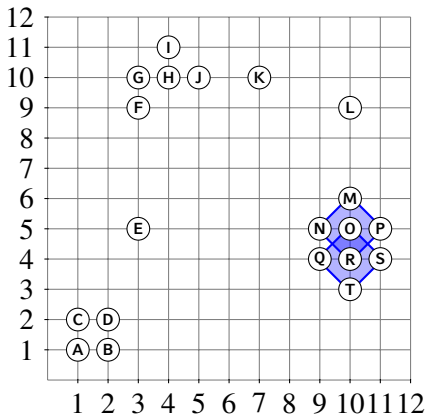
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1	MOPQR	2
O				
P				
Q				
R				
S				
T				



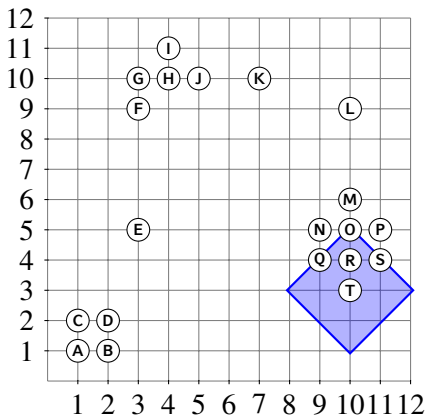
	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1	MOPQR	2
O				
P	OS	1		
Q	NR	1		
R				
S	PR	1		
T				



	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1	MOPQR	2
O				
P	OS	1	MNORS	2
Q	NR	1	NORST	2
R				
S	PR	1	OPQRT	2
T				



	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1	MOPQR	2
O	MNPR	1	MNPR	1
P	OS	1	MNORS	2
Q	NR	1	NORST	2
R	OQST	1	OQST	1
S	PR	1	OPQRT	2
T				



	2NN	2d.	4NN	4d.
A	BC	1	BCDE	6
B	AD	1	ACDE	5
C	AD	1	ABDE	5
D	BC	1	ABCE	4
E	DF	4	BCDFG	5
F	GH	2	GHIJ	3
G	FH	1	FHIJ	2
H	GIJ	1	FGIJ	2
I	GHJ	2	FGHJ	3
J	GHIK	2	GHIK	2
K	HJ	3	GHIJL	4
L	KMO	4	KMNOPR	5
M	NOPR	2	NOPR	2
N	OQ	1	MOPQR	2
O	MNPR	1	MNPR	1
P	OS	1	MNORS	2
Q	NR	1	NORST	2
R	OQST	1	OQST	1
S	PR	1	OPQRT	2
T	OQRS	2	OQRS	2

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	-	-
E	DF	4	BCDFG	5	-	-
F	GH	2	GHIJ	3	-	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	Ird_2	Ird_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	-	-
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	-
F	GH	2	GHIJ	3	-	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	-	-
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	$5/(5+5+4+4+5)$
F	GH	2	GHIJ	3	-	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1+1)$	-
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	$5/(5+5+4+4+5)$
F	GH	2	GHIJ	3	-	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1+1)$	$4/(6+5+5+5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	$5/(5+5+4+4+5)$
F	GH	2	GHIJ	3	-	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1+1)$	$4/(6+5+5+5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	$5/(5+5+4+4+5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1+2)$	-
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	-
C	AD	1	ABDE	5	-	-
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1+1)$	$4/(6+5+5+5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4+4)$	$5/(5+5+4+4+5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1+2)$	$4/(2+2+3+3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	
H	GIJ	1	FGIJ	2		
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2		
K	HJ	3	GHIJL	4		
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1		
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	-
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	-
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	-	-
K	HJ	3	GHIJL	4	-	-
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2	-	
K	HJ	3	GHIJL	4	-	
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2	-	
N	OQ	1	MOPQR	2	-	
O	MNPR	1	MNPR	1	-	
P	OS	1	MNORS	2	-	
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2	-	
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2	-	
N	OQ	1	MOPQR	2	-	
O	MNPR	1	MNPR	1	-	
P	OS	1	MNORS	2	-	
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	-	
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2	-	
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2	-	
N	OQ	1	MOPQR	2	-	
O	MNPR	1	MNPR	1	-	
P	OS	1	MNORS	2	-	
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2		
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1		
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	
J	GHIK	2	GHIK	2		
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1		
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	-
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	-
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	-
M	NOPR	2	NOPR	2	-	-
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	-	-
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1		
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2		
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	
N	OQ	1	MOPQR	2		
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	-	-
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2		
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1		
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 1 + 2 + 2 + 2)$
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	-	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 1 + 2 + 2 + 2)$
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	$2/(1 + 1)$	-
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 1 + 2 + 2 + 2)$
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 2 + 1 + 2 + 2)$
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	-	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 1 + 2 + 2 + 2)$
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 2 + 1 + 2 + 2)$
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	$4/(1 + 1 + 1 + 2)$	-
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

	2NN	2d.	4NN	4d.	lrd_2	lrd_4
A	BC	1	BCDE	6	-	-
B	AD	1	ACDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
C	AD	1	ABDE	5	-	$4/(6 + 5 + 4 + 5)$
D	BC	1	ABCE	4	$2/(1 + 1)$	$4/(6 + 5 + 5 + 5)$
E	DF	4	BCDFG	5	$2/(4 + 4)$	$5/(5 + 5 + 4 + 4 + 5)$
F	GH	2	GHIJ	3	$2/(1 + 2)$	$4/(2 + 2 + 3 + 3)$
G	FH	1	FHIJ	2	-	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
H	GIJ	1	FGIJ	2	$3/(1 + 2 + 2)$	$4/(3 + 2 + 3 + 2)$
I	GHJ	2	FGHJ	3	-	$4/(3 + 2 + 2 + 2)$
J	GHIK	2	GHIK	2	$4/(2 + 1 + 2 + 3)$	$4/(2 + 2 + 3 + 4)$
K	HJ	3	GHIJL	4	$2/(2 + 3)$	$5/(4 + 3 + 4 + 2 + 5)$
L	KMO	4	KMNOPR	5	-	$6/(4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 5)$
M	NOPR	2	NOPR	2	$4/(2 + 2 + 1 + 2)$	$4/(2 + 1 + 2 + 2)$
N	OQ	1	MOPQR	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 1 + 2 + 2 + 2)$
O	MNPR	1	MNPR	1	$4/(2 + 1 + 1 + 1)$	$4/(2 + 2 + 2 + 1)$
P	OS	1	MNORS	2	$2/(1 + 1)$	$5/(2 + 2 + 1 + 2 + 2)$
Q	NR	1	NORST	2	-	-
R	OQST	1	OQST	1	$4/(1 + 1 + 1 + 2)$	$4/(1 + 2 + 2 + 2)$
S	PR	1	OPQRT	2	-	-
T	OQRS	2	OQRS	2	-	-

Finale LOF-Werte für $k = 2$:

$$\begin{aligned} LOF_2(E) &:= \frac{\frac{2}{2} + \frac{2}{3}}{2} / \frac{2}{8} \\ &\approx 3.333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LOF_2(O) &:= \frac{\frac{4}{7} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{4}{5}}{4} / \frac{4}{5} \\ &\approx 1.054 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LOF_2(K) &:= \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{8}}{2} / \frac{2}{5} \\ &\approx 1.375 \end{aligned}$$

Finale LOF-Werte für $k = 4$:

$$LOF_4(E) := \frac{\frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{21} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10}}{5} / \frac{5}{23}$$
$$\approx 1.279$$

$$LOF_4(O) := \frac{\frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{4}{7}}{4} / \frac{4}{7}$$
$$\approx 0.986$$

$$LOF_4(K) := \frac{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{9} + \frac{4}{11} + \frac{6}{26}}{5} / \frac{5}{18}$$
$$\approx 1.324$$

Finale LOF-Werte für $k = 4$:

$$LOF_4(E) := \frac{\frac{4}{20} + \frac{4}{20} + \frac{4}{21} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10}}{5} / \frac{5}{23}$$

$$\approx 1.279$$

$$LOF_4(O) := \frac{\frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{4}{7}}{4} / \frac{4}{7}$$

$$\approx 0.986$$

$$LOF_4(K) := \frac{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{9} + \frac{4}{11} + \frac{6}{26}}{5} / \frac{5}{18}$$

$$\approx 1.324$$

$|\mathcal{N}(o)|$ des betrachteten Objektes

$|\mathcal{N}(p)|$ der Nachbarn

Summe der Erreichbarkeit von o / p

Sowohl LOF als auch k NN haben bei $k = 4 = |\{A, B, C, D\}|$ das Problem, dass $k + 1$ größer ist als der kleinste Cluster.

Sowohl LOF als auch k NN haben bei $k = 4 = |\{A, B, C, D\}|$ das Problem, dass $k + 1$ größer ist als der kleinste Cluster.

Aber: für 4NN wird der Punkt A der größte Ausreißer.

Sowohl LOF als auch k NN haben bei $k = 4 = |\{A, B, C, D\}|$ das Problem, dass $k + 1$ größer ist als der kleinste Cluster.

Aber: für 4NN wird der Punkt A der größte Ausreißer.

Bei LOF, wird lediglich E weniger deutlich, da sich die Dichten der Nachbarn B , C und D reduzieren. Aber es hat immernoch einen der größten Werte, und A , B , C , D bleiben "Inlier"!

Sowohl LOF als auch k NN haben bei $k = 4 = |\{A, B, C, D\}|$ das Problem, dass $k + 1$ größer ist als der kleinste Cluster.

Aber: für 4NN wird der Punkt A der größte Ausreißer.

Bei LOF, wird lediglich E weniger deutlich, da sich die Dichten der Nachbarn B , C und D reduzieren. Aber es hat immernoch einen der größten Werte, und A , B , C , D bleiben "Inlier"!

⇒ LOF bleibt auch bei ungünstigem k zuverlässiger.