

Skript zur Vorlesung  
**Knowledge Discovery in Databases**  
im Sommersemester 2015

# Kapitel 6: Regression

Vorlesung: PD Dr. Arthur Zimek  
Übungen: Dr. Tobias Emrich

Skript © 2015 Johannes Aßfalg, Christian Böhm, Karsten Borgwardt, Martin Ester, Eshref Januzaj, Karin Kailing, Peer Kröger, Jörg Sander, Matthias Schubert, Arthur Zimek

[http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge\\_Discovery\\_in\\_Databases\\_I\\_\(KDD\\_I\)](http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge_Discovery_in_Databases_I_(KDD_I))

**Klassifikation:** Jedes Objekt  $o$  hat eine Klasse  $C_i \in \{C_1, \dots, C_k\}$

*Klassifikator:*  $O \rightarrow C$

$C$  ist diskret !!

**Regression:** Jedem Objekt  $o$  ist eine Zielvariable  $Y \in \mathfrak{R}$  zugeordnet.

*Regression:*  $O \rightarrow \mathfrak{R}$

Aufgabe der Regression ist die Vorhersage eines kontinuierlichen Wertes.

Zum Beispiel :

Vorhersage des erwarteten Absatzes eines Produkts

*oder*

empfohlene Menge an Düngemittel für einen bestimmten Bodentyp

## lineare Regression

gesuchte Vorhersage-Variable  $Y$  verhält sich linear.

## multiple Regression

lineare Regression, bei der  $Y$  von einem Vektor abhängt.

## nicht-lineare Regression

allgemeiner Fall, die beschriebene Regressionsfunktion muss nicht linear sein.

z.B. Logistic Regression, Poisson Regression

**Gegeben:** Objekt ist durch Zufallsvariable  $X$  beschrieben.

Trainingsobjekte haben zusätzlich noch Ausprägungen der Zielvariable  $Y$ .

**Annahme:**  $Y = \alpha + \beta \cdot X$

Die beobachteten Werte von  $Y$  weichen mit konstanter Varianz von der Linie ab.

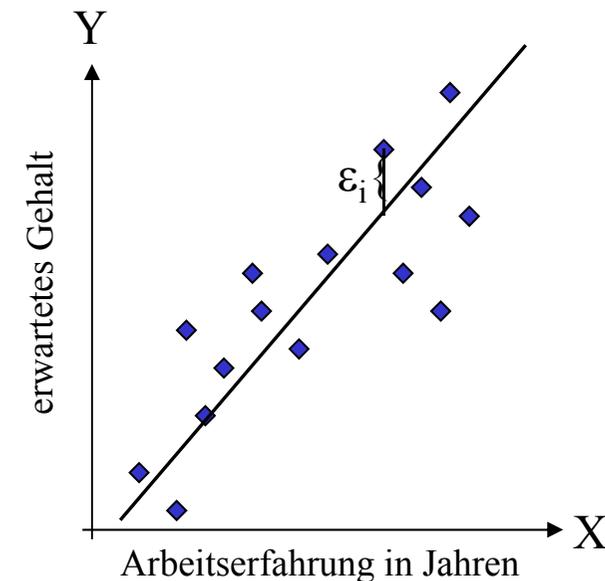
**Gesucht:** Linie, auf der Erwartungswerte liegen.

**Lösung:** Minimiere quadratischen Fehler  
(Least Squares Methode)

D.h. bestimme  $\alpha$  und  $\beta$ , so dass

$$L = \sum_{i=1}^s \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^s (Y_i - \alpha - \beta \cdot X_i)^2 \text{ minimal wird.}$$

$\varepsilon_i$  ist der Abstand von der angenommenen Regressionsgerade.



Lösungsansatz:

Die partiellen Ableitungen nach  $\beta$  und  $\alpha$  ergeben folgende Abschätzungen.

Steigung: 
$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^s (x_i - E(x))(y_i - E(y))}{\sum_{i=1}^s (x_i - E(x))^2}$$

Y-Achsenabschnitt:  $\alpha = E(Y) - \beta \cdot E(X)$

## Multiple Regression:

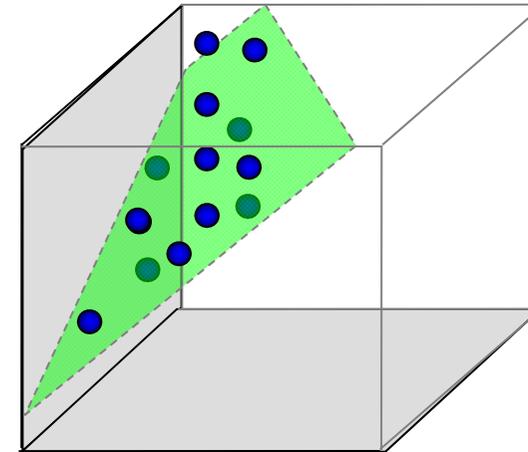
Objekt wird durch  $d$ -dimensionalen Featurevektor beschrieben.

**Annahme:**  $Y$  ist von einer Linear-Kombination abhängig.

$$Y = \alpha + \sum_{i=1}^d \beta_i \cdot X_i$$

**Lösung:** minimiere quadratischen Fehler  
(Least Squares Methode)

$$L = \sum_{i=1}^s \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^s \left( Y_i - \alpha - \sum_{k=1}^d (\beta_k \cdot X_{i,k}) \right)^2$$



**Achtung:** Es ergibt sich eine  
Regressionshyperebene !!

**Gegeben:** Zufallsvariable  $X$  und Zielvariable  $Y$ .

**Annahme:**  $Y$  hängt nicht-linear von  $X$  ab.

**Beispiel:** polynomielle Regression

Annahme:

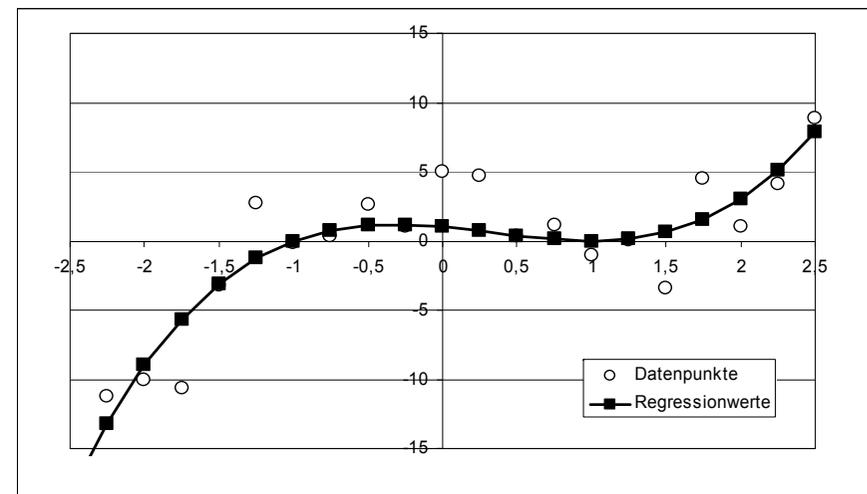
$$Y = \alpha + \beta_1 \cdot X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$$

**Lösung:** Definiere neue Variablen.

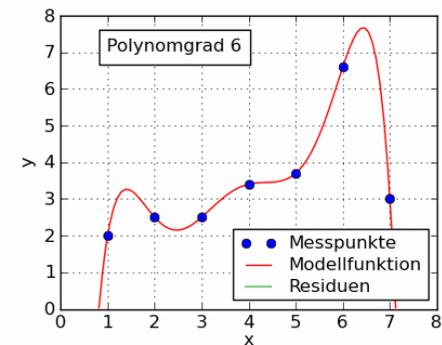
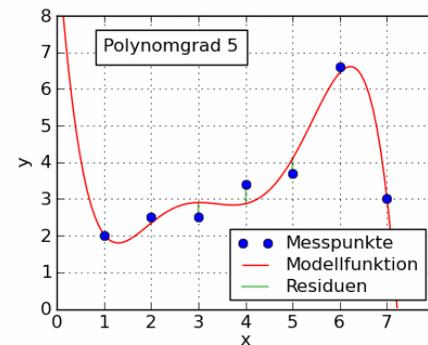
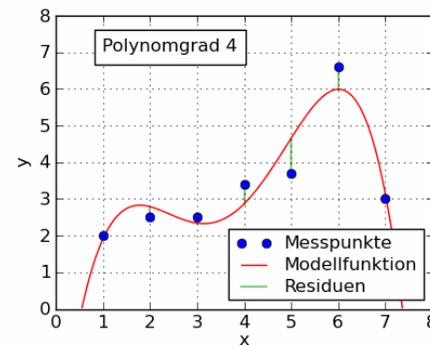
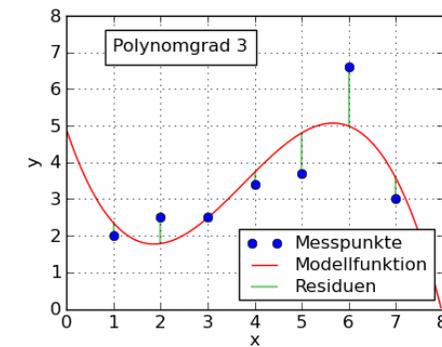
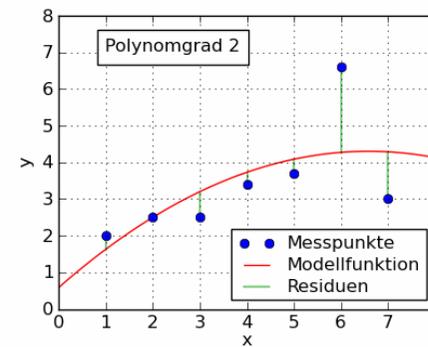
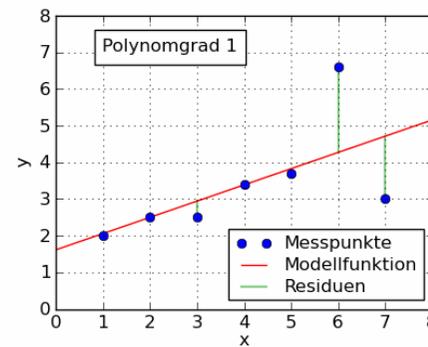
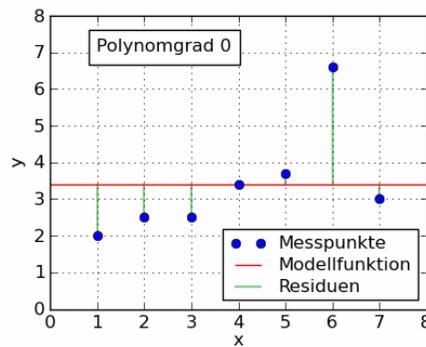
$$X_1 = X, \quad X_2 = X^2, \quad X_3 = X^3$$

Löse lineare multiple Regression

$$Y = \alpha + \beta_1 \cdot X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$$



höhere Komplexität des Polynoms (=mehr Variablen, d.h., Freiheitsgrade)  
 ⇒ bessere Anpassung



Probleme:

- Overfitting
- Outlier verzerren die Schätzung

Bild-Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MDKQ\\_anim.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MDKQ_anim.gif)

## $\varepsilon$ -insensitive Fehlerfunktion

bis jetzt müssen alle Punkte auf Regressionsgerade liegen.

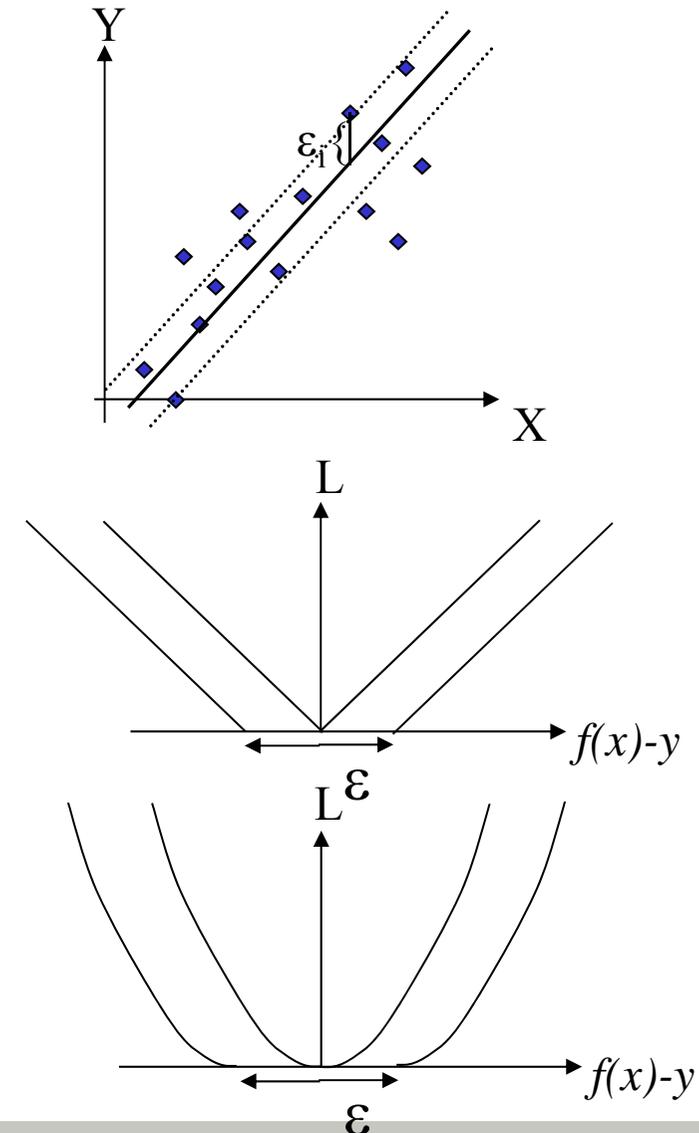
**Aber:** Häufig ist Abstand  $\varepsilon$  von der Linie noch akzeptabel

=> definiere Rand mit Größe  $\varepsilon$ , in dem der Fehler toleriert wird.

$$L^\varepsilon(x, y, f) = |y - f(x)|_\varepsilon = \max(0, |y - f(x)| - \varepsilon)$$

oder als quadratischer Fehler

$$L_2^\varepsilon(x, y, f) = |y - f(x)|_2^\varepsilon$$



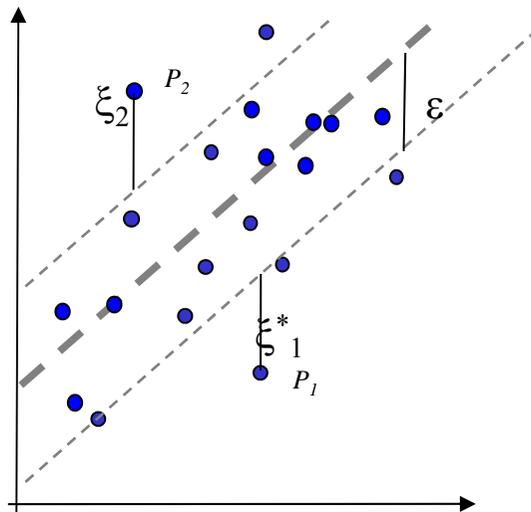
Auf Basis der  $\varepsilon$ -insensitiven Fehlerfunktion kann man jetzt ein Optimierungsproblem ähnlich zu dem der SVMs definieren

**Primäres OP :**

$$\text{minimiere } J(\vec{w}, b, \vec{\xi}) = \|\vec{w}\|^2 + C \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \xi_i^{*2}$$

unter Nebenbedingung für  $\forall i \in [1..n]$  sei  $y_i - (\langle \vec{w}, \vec{x}_i \rangle + b) \leq \varepsilon + \xi_i$

$$(\langle \vec{w}, \vec{x}_i \rangle + b) - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \quad \text{und} \quad \xi_i, \xi_i^* \geq 0$$



- 2 Typen von Slack-Variablen für überhalb und unterhalb des Zielwertes  $y$
- Beachte:  $\xi_i \xi_i^* = 0$ , da Objekt entweder überhalb oder unterhalb der Regressionsgerade liegt.

Überführt in eine Form mit Lagrange Multiplikatoren:

**Duales OP:** maximiere

$$L(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^n y_i (\alpha_i^* - \alpha_i) - \varepsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i^* + \alpha_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i^* - \alpha_i) \cdot (\alpha_j^* - \alpha_j) \cdot \left( \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle + \frac{1}{C} \delta_{ij} \right)$$

mit Bedingung  $\sum_{i=1}^n (\alpha_i^* - \alpha_i) = 0$  und  $0 \leq \alpha_i, 0 \leq \alpha_i^*, i=1 \dots n$

Beachte, dass hierbei gilt:  $\alpha_i \alpha_i^* = 0$  und  $\xi_i \xi_i^* = 0$

Verallgemeinertes Problem mit Kernelfunktion:

**Duales OP:** maximiere  $L(\vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i - \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot K(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$

mit Bedingung  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$  und  $-C \leq \alpha_i \leq C, i=1 \dots n$

## Anmerkungen:

- Über Kernel lässt sich bequem nicht-lineare Regression realisieren
- Training mit den gleichen Lösungsverfahren wie bei SVMs für die Klassifikation
- Es gibt weitere Varianten: z.B. Ridge-Regression.  
Hierbei ist  $\varepsilon = 0$ , d.h. es handelt sich um Least Squares Regression mit einer Einschränkung der Gewichte.

### Ridge Regression :

$$\text{minimiere } J(\vec{w}, b, \vec{\xi}) = \lambda \|\vec{w}\|^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

unter Nebenbedingung für  $\forall i \in [1..n]$  sei  $y_i - (\langle \vec{w}, \vec{x}_i \rangle + b) = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

- Regression löst ein ähnliches Problem wie Klassifikation. Vorhersage: kontinuierliche Werte.
- Regressionsgeraden können häufig analytisch bestimmt werden.
- weiterführende Verfahren mit Kernelfunktionen
- Anmerkung: Die Klassifikations-Methode „Logistische Regression“ ergibt sich als Anwendung von Regression auf das Klassifikations-Problem bei numerischer Interpretation der Klassenvariable (Klasse A:  $Y = 1$ , Klasse B:  $Y = 0$ ).