

Skript zur Vorlesung
Knowledge Discovery in Databases
im Sommersemester 2014

Kapitel 5: Klassifikation

Vorlesung: PD Dr. Arthur Zimek
Übungen: Dr. Erich Schubert

Skript © 2014 Johannes Aßfalg, Christian Böhm, Karsten Borgwardt, Martin Ester, Eshref Januzaj, Karin Kailing, Peer Kröger, Jörg Sander, Matthias Schubert, Arthur Zimek

[http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge_Discovery_in_Databases_I_\(KDD_I\)](http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge_Discovery_in_Databases_I_(KDD_I))

Inhalt dieses Kapitels

5.1 Grundbegriffe der Klassifikation

5.2 Bewertung von Klassifikatoren

5.3 Bayes-Klassifikatoren

5.4 Nächste-Nachbarn-Klassifikatoren

5.5 Entscheidungsbaum-Klassifikatoren

5.6 Neuronale Netze

5.7 Support Vector Machines und Kernel Learning

5.1 Grundbegriffe der Klassifikation

Das Klassifikationsproblem

Gegeben: Eine Menge O von Objekten des Formats (o_1, \dots, o_d) mit *Attributen* A_i , $1 \leq i \leq d$, und Klassenzugehörigkeit c_i :

$$c_i \in C = \{c_1, \dots, c_k\}$$

Gesucht: die Klassenzugehörigkeit für Objekte aus $DB \setminus O$
ein *Klassifikator* $K : DB \rightarrow C$

Abgrenzung zum Clustering

Klassifikation: Klassen a priori bekannt

Clustering: Klassen werden erst gesucht

Verwandtes Problem: *Vorhersage* (Prediction)

gesucht ist der Wert für ein numerisches Attribut

Methode z.B. Regression (siehe Kapitel 6).

Beispiel

ID	Alter	Autotyp	Risiko
1	23	Familie	hoch
2	17	Sport	hoch
3	43	Sport	hoch
4	68	Familie	niedrig
5	32	LKW	niedrig

Einfacher Klassifikator

```
if Alter > 50 then Risikoklasse = Niedrig;
```

```
if Alter ≤ 50 and Autotyp=LKW then Risikoklasse=Niedrig;
```

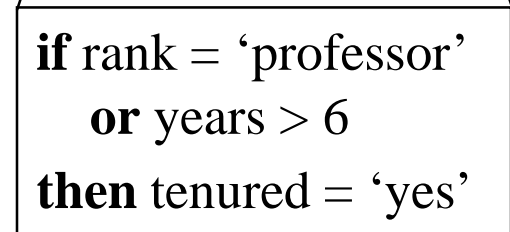
```
if Alter ≤ 50 and Autotyp ≠ LKW
```

```
    then Risikoklasse = Hoch.
```

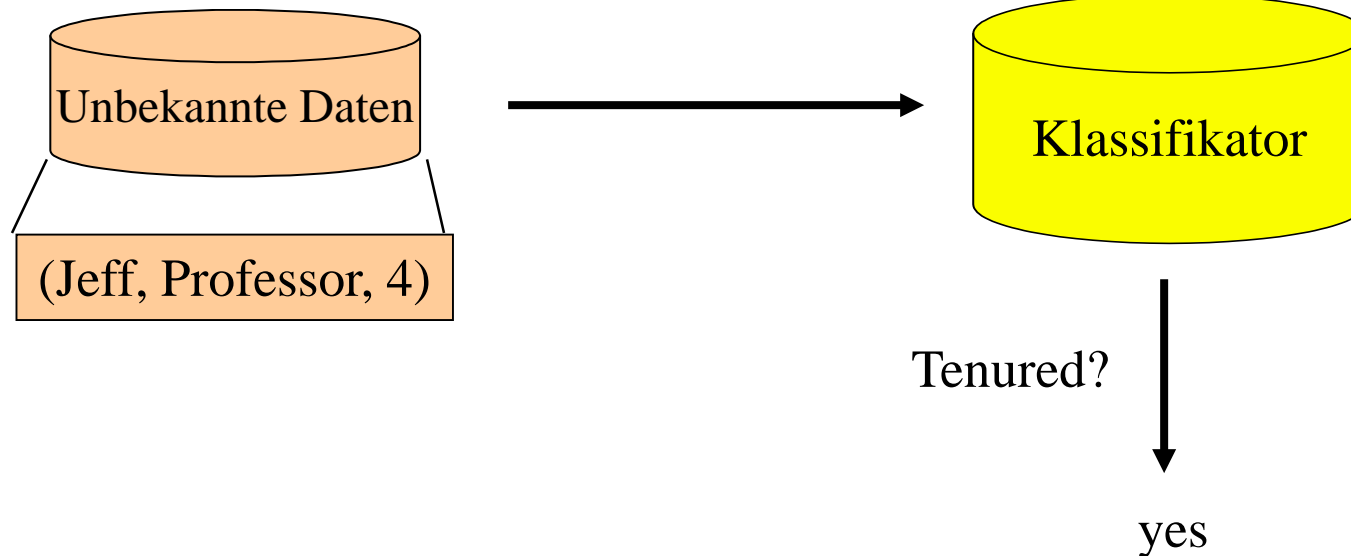
Konstruktion des Modells



NAME	RANK	YEARS	TENURED
Mike	Assistant Prof	3	no
Mary	Assistant Prof	7	yes
Bill	Professor	2	yes
Jim	Associate Prof	7	yes
Dave	Assistant Prof	6	no
Anne	Associate Prof	3	no



Anwendung des Modells



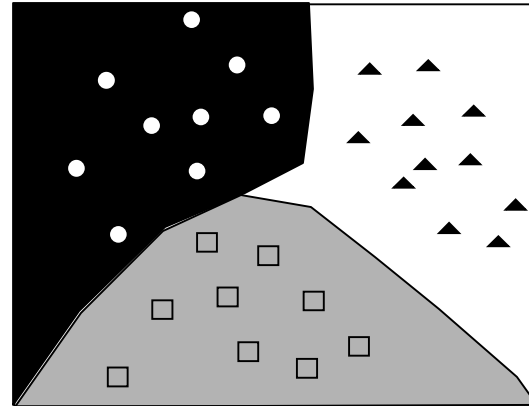
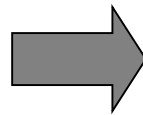
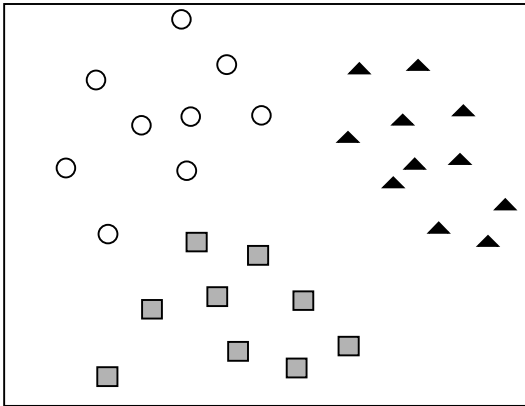
manchmal:



keine Klassifikation unbekannter Daten sondern „nur“
besseres Verständnis der Daten

Trainingsmenge mit 3 Klassen

3 Klassenbereiche (weiß, grau, schwarz)

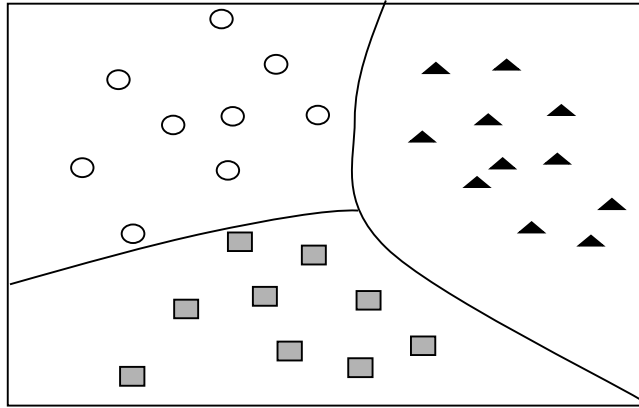


Klassifikatoren legen beim Training im Allgemeinen Klassengrenzen fest.

Aber: Es gibt viele Methoden, Klassengrenzen aus Trainingsdaten abzuleiten.

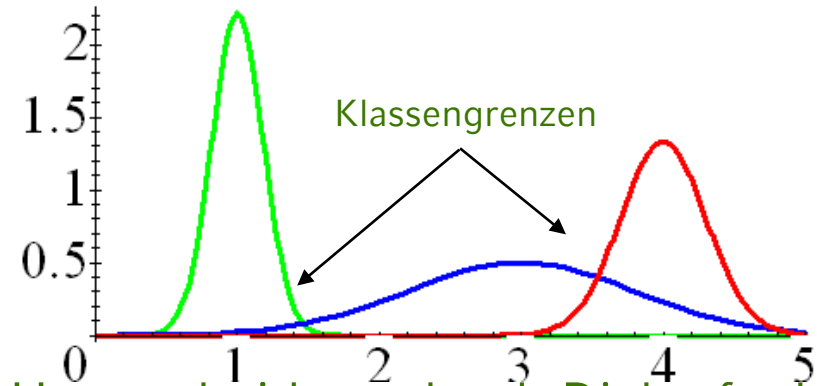
=> Unterschiedliche Klassifikatoren
(statische Kl., Entscheidungsbäume, Support Vektor Maschinen,
kNN-Klassifikatoren, neuronale Netze, ...)

Motivation der Klassifikationsmethoden(1)

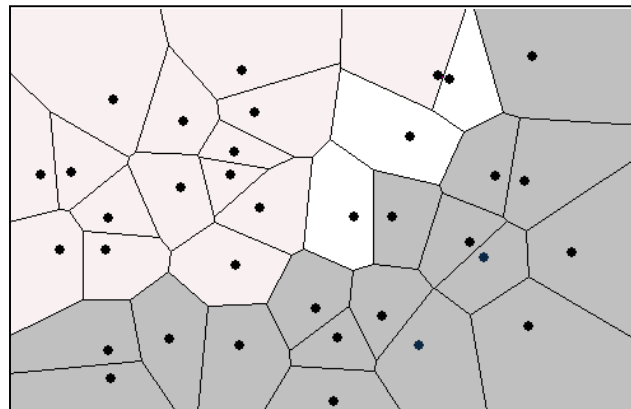


Bayes Klassifikatoren

1-dimensionale Projektion



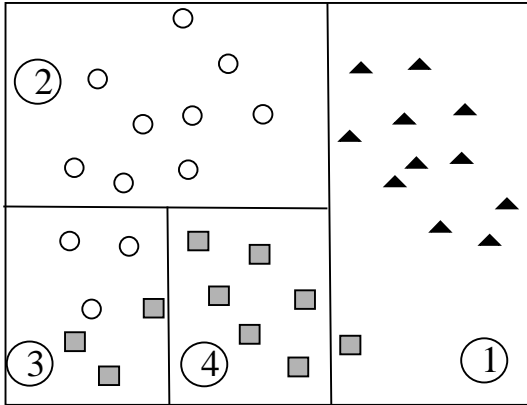
Unterscheidung durch Dichtefunktionen.



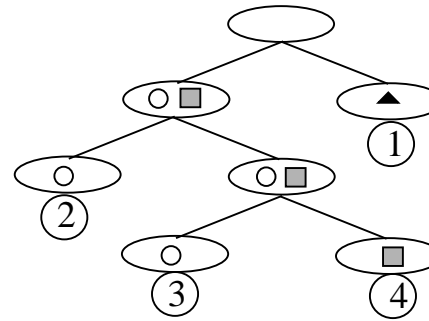
NN-Klassifikator

Unterscheidung durch Voronoi-Zellen
(1 nächster Nachbar Klassifikator)

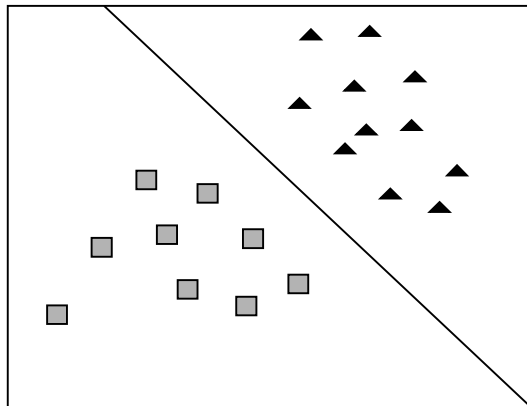
Motivation der Klassifikationsmethoden(2)



Entscheidungsbäume



Festlegen der Grenzen durch rekursive Unterteilung in Einzeldimension.



Support Vektor Maschinen

Grenzen über lineare Separation

Intuition und Grundannahmen

- Es gibt einen (natürlichen, technischen, sozial-dynamischen, ...) Prozess (im statistischen Sinne), der die beobachteten Daten O als Teilmenge der möglichen Daten D erzeugt bzw. für ein $x \in D$ eine Klassenentscheidung für eine Klasse $c_i \in C$ trifft.
- Die beobachteten Daten sind Beispiele für die Wirkung des Prozesses.
- Es gibt eine ideale (unbekannte) Funktion, die einen Beispiel-Datensatz auf die zugehörige Klasse abbildet:
 $f: D \rightarrow C$
- Aufgabe des Lernalgorithmus ist es, eine möglichst gute Approximation h von f zu finden: eine Hypothese, die die gegebenen Daten erklärt (und im Idealfall hilft, den Prozess zu verstehen, der die Daten erzeugt hat).

Intuition und Grundannahmen

- Beispiel:

$f: Sky \times AirTemp \times Humidity \times Wind \times Water \times Forecast \rightarrow \{Yes, No\}$

Sky	AirTemp	Humidity	Wind	Water	Forecast	EnjoySport
Sunny	Warm	Normal	Strong	Warm	Same	Yes
Sunny	Warm	High	Strong	Warm	Same	Yes
Rainy	Cold	High	Strong	Warm	Change	No
Sunny	Warm	High	Strong	Cool	Change	Yes

- Gibt es ein generelles Konzept, wann Sport getrieben wird?
- Lernen braucht Annahmen (Bias), z.B.: „*Das Konzept ist eine Konjunktion ausgewählter Attributwerte.*“

Intuition und Grundannahmen

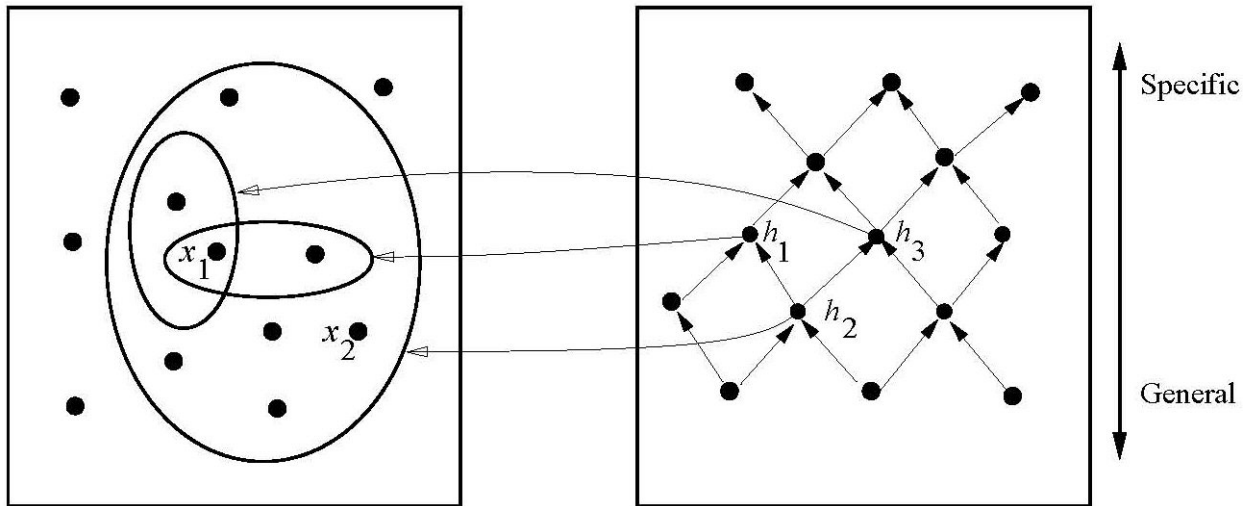
Sky	AirTemp	Humidity	Wind	Water	Forecast	EnjoySport
Sunny	Warm	Normal	Strong	Warm	Same	Yes
Sunny	Warm	High	Strong	Warm	Same	Yes
Rainy	Cold	High	Strong	Warm	Change	No
Sunny	Warm	High	Strong	Cool	Change	Yes

- Mögliche Hypothesen für Yes unter dieser Annahme:

<p><Sunny,?, ?, ?, ?, ?></p> <p><?, Warm, ?, ?, ?, ?></p> <p><Sunny, Warm, ?, ?, ?, ?></p>	<p><Sunny, ?, ?, Strong, ?, ?></p> <p><?, Warm, ?, Strong, ?, ?></p> <p><Sunny, Warm, ?, Strong, ?, ?></p>
--	--

Intuition und Grundannahmen

- Durch die Annahmen eines Klassifikators wird der Raum möglicher Hypothesen (lernbarer Konzepte) definiert.



$x_1 = \langle \text{Sunny, Warm, High, Strong, Cool, Same} \rangle$

$x_2 = \langle \text{Sunny, Warm, High, Light, Warm, Same} \rangle$

$h_1 = \langle \text{Sunny, ?, ?, Strong, ?, ?} \rangle$

$h_2 = \langle \text{Sunny, ?, ?, ?, ?, ?} \rangle$

$h_3 = \langle \text{Sunny, ?, ?, ?, Cool, ?} \rangle$

- Sind komplexere Annahmen sinnvoll (erlaubt auch Disjunktionen, Negationen)?

Intuition und Grundannahmen

Konjunktive Hypothesen für Yes:

$\langle \text{Sunny}, ?, ?, ?, ?, ? \rangle$

$\langle \text{Sunny}, ?, ?, \text{Strong}, ?, ? \rangle$

$\langle ?, \text{Warm}, ?, ?, ?, ? \rangle$

$\langle ?, \text{Warm}, ?, \text{Strong}, ?, ? \rangle$

$\langle \text{Sunny}, \text{Warm}, ?, ?, ?, ? \rangle$

$\langle \text{Sunny}, \text{Warm}, ?, \text{Strong}, ?, ? \rangle$

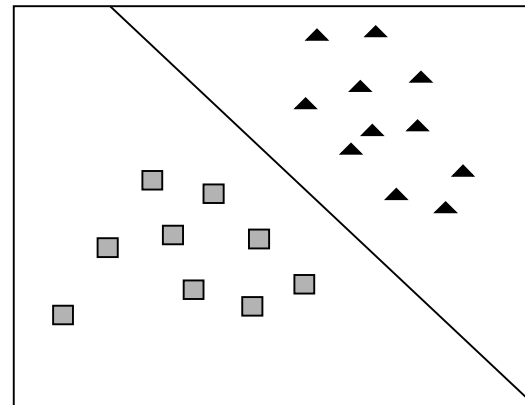
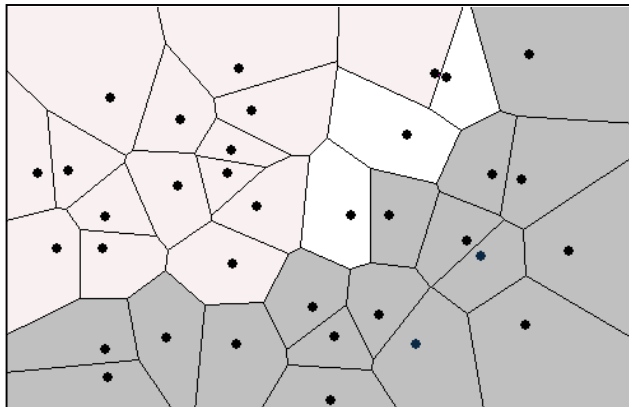
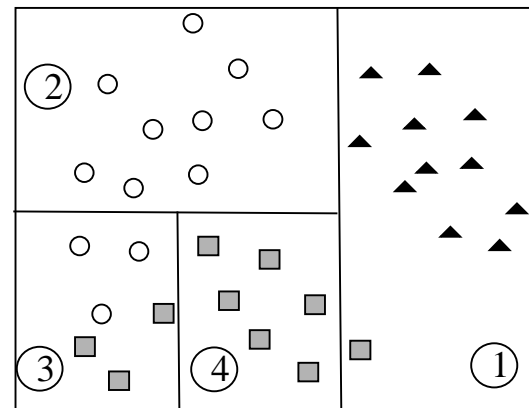
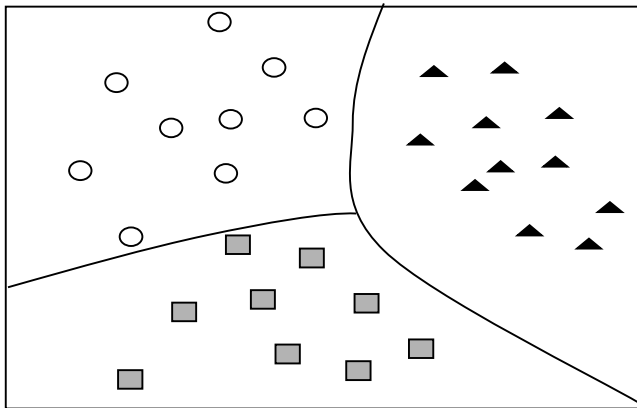
Neue Daten:

Sky	AirTemp	Humidity	Wind	Water	Forecast	EnjoySport
Sunny	Warm	Normal	Strong	Cool	Change	Yes
Cloudy	Warm	Normal	Strong	Cool	Change	Yes
Rainy	Warm	Normal	Strong	Cool	Change	No

- keine konsistente Hypothese unter unserer Annahme möglich:
- spezifischste Hypothese $\langle ?, \text{Warm}, \text{High}, \text{Strong}, \text{Cool}, \text{Same} \rangle$ für positive Beispiele ist bereits zu generell (deckt auch das negative Beispiel ab)
- Disjunktives Konzept: „if Sky=Sunny or Sky = Cloudy, then Yes“ ermöglicht Auflistung aller Lernbeispiele als Hypothese.
- Allgemein: Ohne einschränkende Annahmen kann Auswendiglernen nicht ausgeschlossen werden.

Intuition und Grundannahmen

Verschiedene Klassifikationsalgorithmen basieren auf verschiedenen Annahmen (unterschiedlicher Bias).



Grundbegriffe

- Eine Datenbank DB repräsentiert eine Domäne durch das Sample der vorhandenen Daten.
- $O \subseteq DB$ ist die Menge der Objekte, bei denen die Klassenzugehörigkeit bereits bekannt ist.
- Sei K ein Klassifikator und sei $TR \subseteq O$ die Trainingsmenge.

Problem der Bewertung:

- Gewünscht ist gute Performanz auf ganz DB , aber die Qualität auf $DB \setminus O$ ist grundsätzlich unbekannt.
- Klassifikator ist für TR optimiert.
- Test auf TR erzeugt in der Regel viel bessere Ergebnisse, als auf $DB \setminus TR$.
Daher kein realistisches Bild der Performanz auf DB .

\Rightarrow *Overfitting*

Train-and-Test

Bewertung ohne *Overfitting* durch Aufteilen von O in :

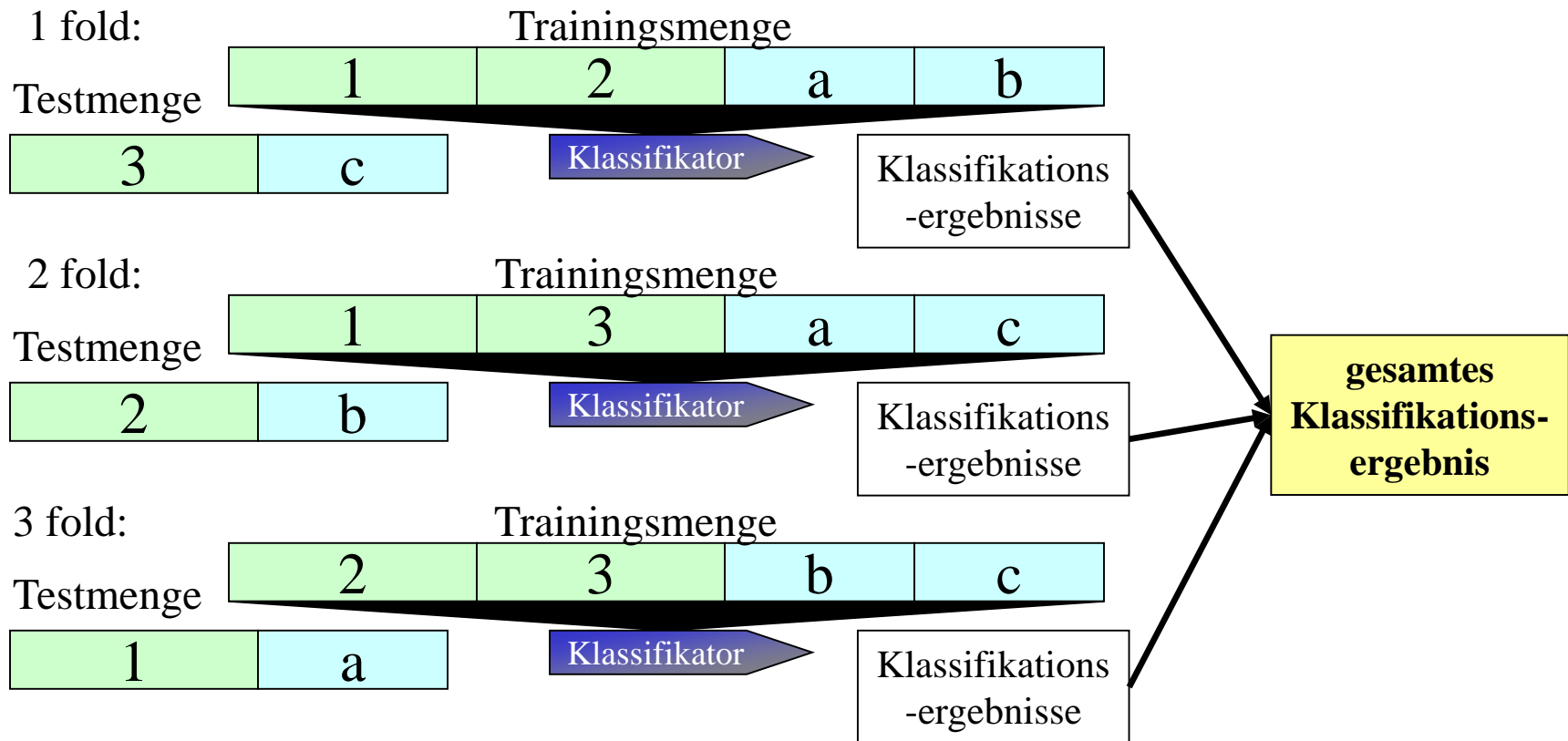
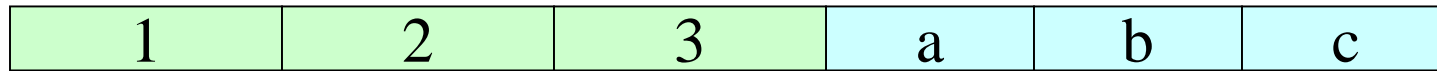
- *Trainingsmenge TR*
zum Lernen des Klassifikators (Konstruktion des Modells)
- *Testmenge TE*
zum unabhängigen Bewerten des Klassifikators
- *Ziel: Abschätzen der Erfolg- bzw. Fehlerrate des Klassifikators*
Daher: Test-Daten müssen unabhängig von Trainingsdaten sein
Trainings- und Testdaten sollen das Problem angemessen widerspiegeln
(z.B. proportionale Anteile der verschiedenen Klassen)

m-fache Überkreuz-Validierung

- sinnvolle manuelle Aufteilung in Trainings- und Testmenge nicht trivial
- Train-and-Test nicht anwendbar, wenn nur wenige Objekte mit bekannter Klassenzugehörigkeit vorhanden sind.
- Stattdessen: *m*-fache Überkreuz-Validierung (*m*-fold Cross-Validation)
 - teile die Menge O zufällig in m gleich große Teilmengen
 - verwende jeweils $m-1$ Teilmengen zum Training und die verbleibende Teilmenge zur Bewertung
 - kombiniere die erhaltenen m Klassifikationsfehler
 - wiederhole das Verfahren mehrmals

Ablauf 3-fache Überkreuzvalidierung (3-fold Cross Validation)

Sei $n = 3$: Menge aller Daten mit Klasseninformation die zu Verfügung stehen



zusätzliche Anforderung: Stratifikation

- Proportionalität der Klassen erhalten
- zumindest: jede Klasse sollte in Trainingsmenge enthalten sein
- sinnvoll: Verteilung der Klassen sollte in Trainings- und Testmenge die Verteilung auf dem gegebenen Problem widerspiegeln
- Standard: 10-fache, stratifizierte Kreuzvalidierung, 10-mal wiederholt (Erfahrungswerte)

Alternative: Bootstrap

bilden einer Trainingsmenge aus einer gegebenen Datenmenge durch Ziehen mit Zurücklegen.

- jedes Sample hat die gleiche Größe wie die ursprüngliche Trainingsmenge
 - ein Sample enthält durchschnittlich 63% der Ausgangsbeispiele (einige mehrfach, etwa 37% gar nicht):
 - ein einzelnes Beispiel in einem Datensatz mit n Beispielen hat bei jedem Ziehen die Chance $1/n$ gezogen zu werden, wird also mit Wahrscheinlichkeit $1-1/n$ **nicht** gezogen
 - nach n -mal Ziehen ist ein bestimmtes Element mit Wahrscheinlichkeit $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ nicht gezogen worden
 - für große n ist $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx e^{-1} \approx 0.368$
 - daher auch der Name "0.632 bootstrap" für diese Sampling-Methode
- Im Allgemeinen eher optimistische Fehlerschätzung

Alternative: Leave-one-out (auch: Jackknife)

- Trainingsmenge wird gebildet durch Weglassen eines einzigen Elementes, dieses wird als Test-Objekt verwendet
- Verfahren wird wiederholt für alle Objekte der gelabelten Daten, Fehler-Abschätzung gemittelt
- Vorteil: kein Zufallselement
- Nachteil: garantiert nicht stratifiziert
- Im Allgemeinen eher pessimistische Fehlerschätzung

Ergebnis des Tests : Konfusionsmatrix (confusion matrix)

		klassifiziert als ...				
		Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3	Klasse 4	other
tatsächliche Klasse ...	Klasse 1	35	1	1	1	4
	Klasse 2	0	31	1	1	5
	Klasse 3	3	1	50	1	2
	Klasse 4	1	0	1	10	2
	other	3	1	9	15	13

korrekt
klassifizierte
Objekte

Aus der Konfusionsmatrix lassen sich u.a. folgende Kennzahlen berechnen:
Accuracy, Classification Error, Precision und Recall.

Gütemaße für Klassifikatoren

Sei K ein Klassifikator, $TR \subseteq O$ die Trainingsmenge, $TE \subseteq O$ die Testmenge. Bezeichne $C(o)$ die tatsächliche Klasse eines Objekts o , $K(o)$ die von K vorhergesagte.

- *Klassifikationsgenauigkeit* (classification accuracy) von K auf TE :

$$G_{TE}(K) = \frac{|\{o \in TE \mid K(o) = C(o)\}|}{|TE|}$$

- *Tatsächlicher Klassifikationsfehler* (true classification error)

$$F_{TE}(K) = \frac{|\{o \in TE \mid K(o) \neq C(o)\}|}{|TE|}$$

- *Beobachteter Klassifikationsfehler* (apparent classification error)

$$F_{TR}(K) = \frac{|\{o \in TR \mid K(o) \neq C(o)\}|}{|TR|}$$

Recall:

Anteil der Testobjekte einer Klasse i , die richtig erkannt wurden.

Sei $C_i = \{o \in TE \mid C(o) = i\}$, dann ist

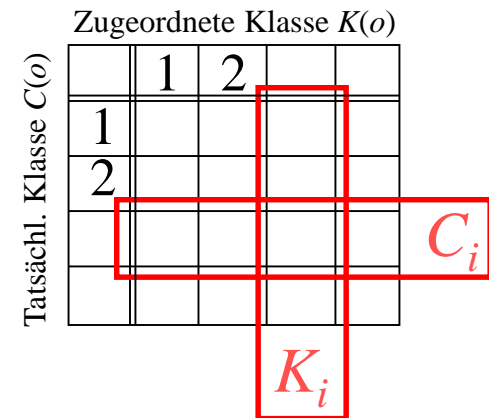
$$\text{Recall}_{TE}(K, i) = \frac{|\{o \in C_i \mid K(o) = C(o)\}|}{|C_i|}$$

Precision:

Anteil der zu einer Klasse i zugeordneten Testobjekte, die richtig erkannt wurden.

Sei $K_i = \{o \in TE \mid K(o) = i\}$, dann ist

$$\text{Precision}_{TE}(K, i) = \frac{|\{o \in K_i \mid K(o) = C(o)\}|}{|K_i|}$$



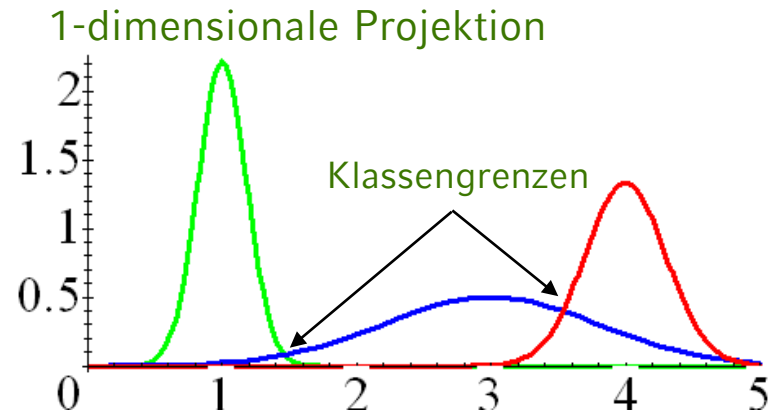
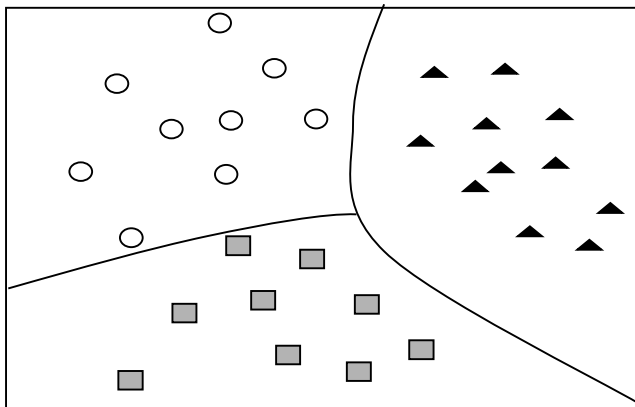
weitere Gütekriterien für Klassifikatoren

- **Kompaktheit** des Modells
 - z.B. Größe eines Entscheidungsbaums
- **Interpretierbarkeit** des Modells
 - Wieviele Einsichten vermittelt das Modell dem Benutzer?
- **Effizienz**
 - der Konstruktion des Modells
 - der Anwendung des Modells
- **Skalierbarkeit**
 - für große Datenmengen
 - für sekundärspeicherresidente Daten
- **Robustheit** gegenüber Rauschen und fehlenden Werten

Was sind Bayes-Klassifikatoren?

Statistische Klassifikatoren

- Klassen werden durch statistische Prozesse beschrieben
- Beruht auf dem Satz von Bayes
- Bestimme Wahrscheinlichkeiten, mit denen jeder Prozess das Objekt erklärt (Class-Membership-Probability)
- Vorhersage der wahrscheinlichsten Klasse (Maximum Likelihood Classification)



Grundlagen statistischer Klassifikatoren

1. A-priori und A-posteriori Wahrscheinlichkeiten
2. Regel von Bayes
3. „Maximum Likelihood“ Klassifikation

Klassifikatoren und statistische Prozesse

1. Naïve Bayes
2. Bayes Netzwerke
3. LDA
4. multivariate Gauß-Prozesse

Grundlagen

- Regeln und Fakten zur Klassifikation werden mit Hilfe des Satzes von Bayes als bedingte Wahrscheinlichkeiten formuliert
- A-Priori-Wahrscheinlichkeiten modellieren Faktenwissen über die Häufigkeit einer Klasse und das Auftreten von Merkmalen, z.B.
 - 20% der Objekte sind Äpfel
 - 30% sind Orangen
 - 50% der Objekte sind rund
 - 40% haben Farbe orange

$\left. \begin{array}{l} \text{– 20\% der Objekte sind Äpfel} \\ \text{– 30\% sind Orangen} \end{array} \right\} \text{A-Priori Wahrsch. f. Klassenzugehörigk.}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{– 50\% der Objekte sind rund} \\ \text{– 40\% haben Farbe orange} \end{array} \right\} \text{A-Priori Merkmalshäufigkeit}$
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten („A-Posteriori“) modellieren Zusammenhänge zwischen Klassen und Merkmalen:
 - 100% der Orangen sind rund: $P(\text{rund} \mid \text{Orange}) = 100\%$
 - 100% der Äpfel sind rund: $P(\text{rund} \mid \text{Apfel}) = 100\%$
 - 90% der Orangen sind orange: $P(\text{orange} \mid \text{Orange}) = 90\%$

Bei einem gegebenen Merkmals-Vektor M lässt sich die Wahrscheinlichkeit der Klassenzugehörigkeit zu Klasse C_i mit dem Satz von Bayes ermitteln:

$$P(C_i | M) = \frac{P(M | C_i) \cdot P(C_i)}{P(M)} = \frac{P(M | C_i) \cdot P(C_i)}{\sum_{c_j \in C} P(C_j) \cdot P(M | C_j)}$$

Im Beispiel: Wahrscheinlichkeit, dass ein oranges Objekt eine Orange ist:

$$P(\text{Orange} | \text{orange}) = \frac{P(\text{orange} | \text{Orange}) \cdot P(\text{Orange})}{P(\text{orange})} = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.4} = 0.675$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten werden aus den Trainingsdaten geschätzt.

- Der Bayes-Klassifikator schätzt die Wahrscheinlichkeit der Klassenzugehörigkeit eines Merkmalsvektors
- Zur eindeutigen Zuordnung eines Klassen-Labels geht man meist nach dem Prinzip „Maximum Likelihood“ vor:

$$C = \operatorname{argmax}_{C_i} P(C_i | M) = \operatorname{argmax}_{C_i} \frac{P(M | C_i) \cdot P(C_i)}{P(M)} = \operatorname{argmax}_{C_i} P(M | C_i) \cdot P(C_i)$$

- Da $P(M)$ bei allen C_i gleich ist, ist nur das Produkt zu optimieren. Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} - P(\text{Apfel} \mid M) = 32\% \\ - P(\text{Orange} \mid M) = 32\% \\ - P(\text{Kiwi} \mid M) = 36\% \end{array} \right\} \Rightarrow C = \text{Kiwi}$$

„A-priori“ Wahrscheinlichkeiten

Meistens: relative Häufigkeit in den Trainingsdaten.

Bsp: 7 Orangen , 2 Äpfel , 1 Stein =>

$$P(\text{Orange}) = \frac{7}{7+2+1} = 70\%$$

„A-Posteriori“ Wahrscheinlichkeiten

- Statistischer Prozess modelliert Zusammenhänge zwischen Merkmalen und einer Klasse
- Unterschiede verwendeter Prozesse:
 - Abhängigkeit der Merkmale (Korrelation oder Unabhängigkeit)
 - Verwendete Verteilungsfunktionen der Merkmalswerte (diskret, Normalverteilung, Multinomialverteilung...)
 - Beschaffenheit der Objekte (Vektor, Sequenz...)

Diskrete Merkmale

Auszählen relativer Häufigkeiten

Bsp:

$$P(\text{Form} = \text{rund} \mid A) = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$P(\text{Farbe} = \text{grün} \mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

$$P(\text{Form} = \text{oval} \mid A) = \frac{0}{4} = 0\%$$

ID	Form	Farbe	Klasse
1	rund	orange	A
2	rund	grün	A
3	rund	gelb	A
4	eckig	grün	A
5	oval	weiß	B

Problem: (Form = oval) \Rightarrow Klasse \neq A

Man verwendet häufig „Smoothing“, d.h. $P(x \mid \text{Klasse}) > \varepsilon$.

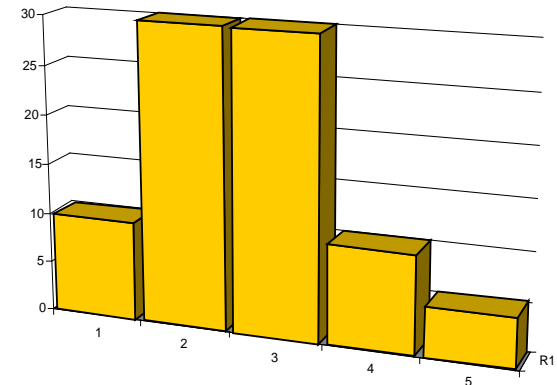
mit $0 < \varepsilon \ll 1$.

D.h.
$$P(\text{Form} = \text{oval} \mid A) = \max\left(\frac{0}{4}, \varepsilon\right) = \varepsilon$$

Kontinuierliche metrische Attribute

diskrete Approximation

- $P(9.0 < \text{Durchmesser} \leq 9.5 \mid \text{Orange}) = 10\%$
- $P(9.5 < \text{Durchmesser} \leq 10.0 \mid \text{Orange}) = 30\%$
- $P(10.0 < \text{Durchmesser} \leq 10.5 \mid \text{Orange}) = 30\%$
- $P(10.5 < \text{Durchmesser} \leq 11.0 \mid \text{Orange}) = 10\%$
- $P(11.0 < \text{Durchmesser} \leq 11.5 \mid \text{Orange}) = 5\%$



Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktionen

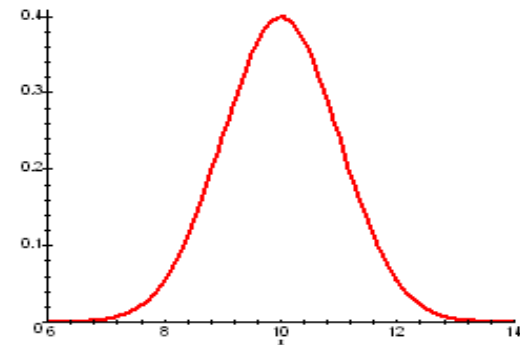
z.B. Orangen haben einen Durchmesser von 10 ± 1 cm:

$$p(\text{Durchmesser} \mid \text{Orange}) = N(10, 1)$$

meist Berechnung nach Normalverteilung:

$$P(x \mid C) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

wobei $\mu = \frac{\sum_{x \in TR} x}{|TR|}$ und $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{x \in TR} (x - \mu)^2}{|TR|}}$



Bei hochdimensionalen Merkmalsvektoren schwierige Schätzung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(M | C)$ und damit $P(C | M)$:

- M besteht aus vielen einzelnen Komponenten, die UND-verknüpft sind:

$$P(C | M_1 \wedge M_2 \wedge \dots) = \frac{P(M_1 \wedge M_2 \wedge \dots | C) \cdot P(C)}{P(M_1 \wedge M_2 \wedge \dots)}$$

- Bei d verschiedenen Merkmalen und jeweils r verschiedenen Werten ergeben sich r^d verschiedene Merkmalskombinationen

Probleme:

- Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich nicht mehr abspeichern
- Man bräuchte $\gg r^d$ Trainingsdatensätze, um die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Merkmalskombinationen überhaupt ermitteln zu können

Lösung dieses Problems beim naiven Bayes-Klassifikator:

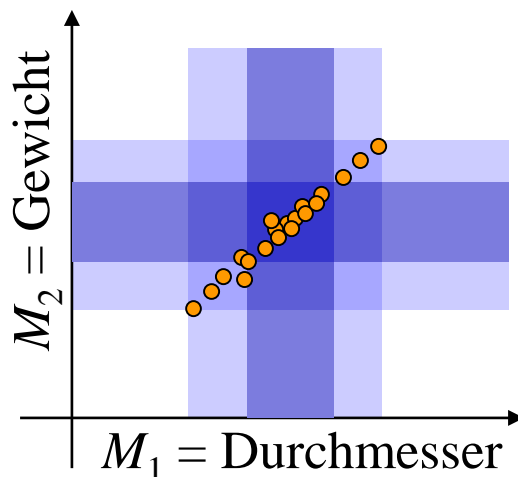
Annahme der bedingten Unabhängigkeit

d.h. bei jeder einzelnen Klasse werden die Merkmale so behandelt als wären sie voneinander statistisch unabhängig:

$$P(M_1 \wedge M_2 | C) = P(M_1 | C) \cdot P(M_2 | C)$$

Was bedeutet dies?

Klasse=Orange:



- Annahme kann falsch sein
- Dies führt *nicht* unbedingt dazu, dass die Klassifikation versagt
- Aber schlechte Leistung, wenn...
 - alle Merkmale bei mehreren Klassen etwa gleich verteilt sind
 - Unterschiede nur in „Relationen“ der Merkmale zueinander

Damit ist die Wahrscheinlichkeit der Zugehörigkeit zur Klasse C_i :

$$\begin{aligned}
 P(C_i | M_1 \wedge M_2 \wedge \dots) &= \frac{P(C_i) \cdot P(M_1 \wedge M_2 \wedge \dots | C_i)}{P(M_1 \wedge M_2 \wedge \dots)} \\
 &= \frac{P(C_i) \cdot \prod_j P(M_j | C_i)}{\sum_k P(C_k) \prod_j P(M_j | C_k)}
 \end{aligned}$$

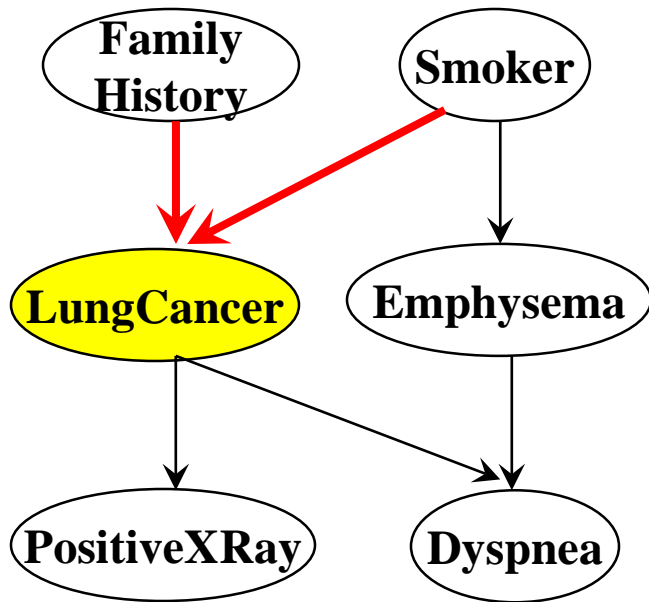
Auch hier ist der Nenner für alle Klassen gleich, so dass nur der Zähler zu maximieren ist:

$$C = \operatorname{argmax}_{C_i} \{ P(C_i) \cdot \prod_j P(M_j | C_i) \}$$

Grundbegriffe

- Graph mit Knoten = *Zufallsvariable* und Kante = *bedingte Abhängigkeit*
- Jede Zufallsvariable ist bei gegebenen Werten für die Vorgänger-Variablen bedingt unabhängig von allen Zufallsvariablen, die keine Nachfolger sind.
- Für jeden Knoten (Zufallsvariable):
Tabelle der bedingten Wahrscheinlichkeiten
- Trainieren eines Bayes-Netzwerkes
 - bei gegebener Netzwerk-Struktur und allen bekannten Zufallsvariablen
 - bei gegebener Netzwerk-Struktur und teilweise unbekanntem Zufallsvariablen
 - bei apriori unbekannter Netzwerk-Struktur

Beispiel



	FH, S	$FH, \neg S$	$\neg FH, S$	$\neg FH, \neg S$
LC	0.8	0.5	0.7	0.1
$\sim LC$	0.2	0.5	0.3	0.9

bedingte Wahrscheinlichkeiten
für LungCancer

bei gegebenen Werten für FamilyHistory und Smoker liefert der Wert für Emphysema keine zusätzliche Information über LungCancer.

- Modelliere alle Klassen als multivariate Normalverteilungen
- Berücksichtigt Korrelationen der Attribute
- Varianzen und Korrelationen für alle Klassen gleich

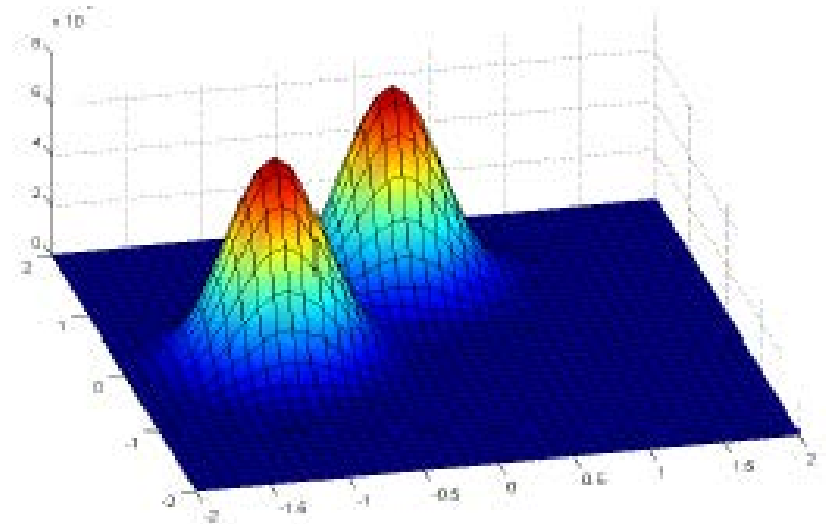
Basis multivariate Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$$P(x | C) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x-\mu)^T \cdot (\Sigma)^{-1} \cdot (x-\mu)}$$

Erwartungsvektor: $\mu = \frac{\sum_{x \in TR} x}{|TR|}$

Kovarianzmatrix :

$$\Sigma(i, j) = \frac{\sum_{x \in TR} (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)}{|TR|}$$



Eigenschaften:

- Korrelation zwischen i und j
- Varianz in der Diagonalen

Training:

- Bestimme μ_C und Σ_C für alle Klassen C .
- Middle globale Kovarianzmatrix Σ .
(Gewichteter Durchschnitt der Kovarianzmatrizen aller Klassen)

$$\Sigma = \frac{\sum_{C_i \in C} \Sigma_{C_i}}{|C|}$$

Klassifikation:

$$\arg \max_{C_i \in C} P(x | C_i) = \arg \max_{C_i \in C} \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu_{C_i})^T \cdot (\Sigma)^{-1} \cdot (x - \mu_{C_i})} \cdot P(C_i) \right)$$

$$= \arg \max_{C_i \in C} \left(-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu_{C_i})^T \cdot (\Sigma)^{-1} \cdot (x - \mu_{C_i}) + \log(P(C_i)) \right)$$

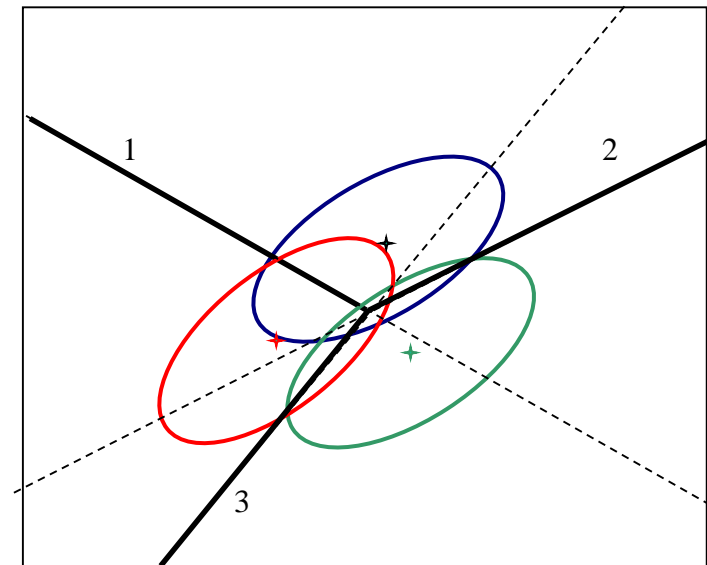
$$= \arg \max_{C_i \in C} \left(\underline{x^T (\Sigma)^{-1} \mu_{C_i} - \frac{1}{2} \mu_{C_i}^T (\Sigma)^{-1} \mu_{C_i} + \log(P(C_i))} \right) = \sigma_{C_i}(x)$$

← Lineare Diskriminanzfunktion

- Beobachtung: Da nur Erwartungswerte unterschiedlich
⇒ Lineare Separation
- Man muss nicht die Wahrscheinlichkeit berechnen.
- Es reicht die Auswertung der folgenden Diskriminanzfunktion:

$$\sigma_{C_i}(x) = x^T \Sigma^{-1} \mu_{C_i} - \frac{1}{2} \mu_{C_i}^T \Sigma^{-1} \mu_{C_i} + \log P(C_i)$$

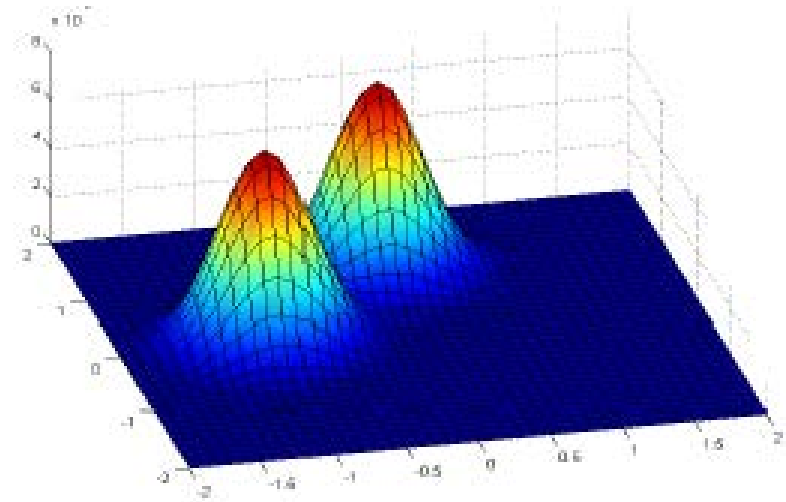
Klasse mit maximalem $\sigma_C(x)$ wird vorhergesagt.



- Modelliere jede Klasse als multivariate Normalverteilung (Vektoren im R^d)
- Berücksichtigt Korrelationen der Attribute
- Hier: Varianzen und Korrelationen für alle Klassen **individuell**
- Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zur Klassifikation (Maximum Likelihood)

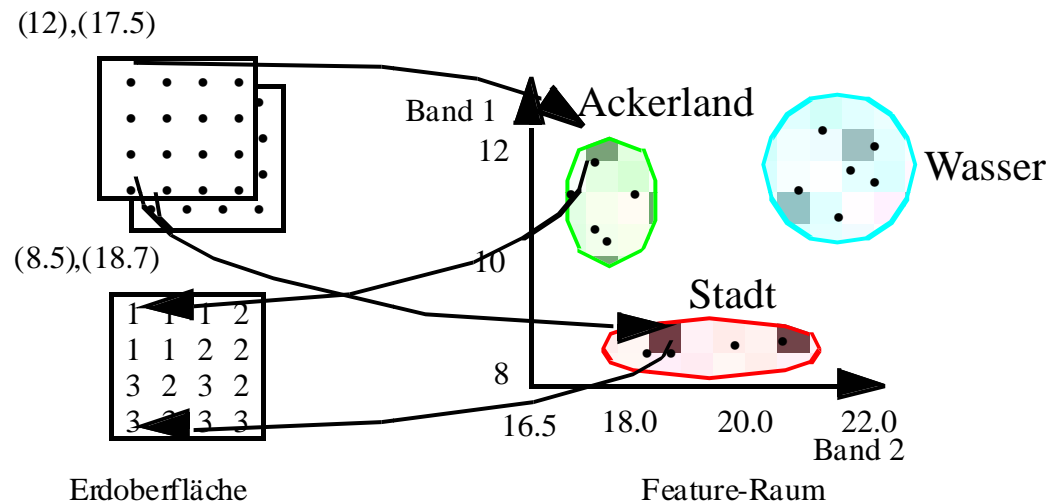
Probleme:

Braucht sehr viele Trainingsobjekte für jede Klasse, um signifikante Korrelationswerte zu bestimmen.



Motivation

- *automatische* Interpretation von d Rasterbildern eines bestimmten Gebiets für jedes Pixel ein d -dimensionaler Grauwertvektor (o_1, \dots, o_d)
- verschiedene Oberflächenbeschaffenheiten der Erde besitzen jeweils ein charakteristisches Reflexions- und Emissionsverhalten

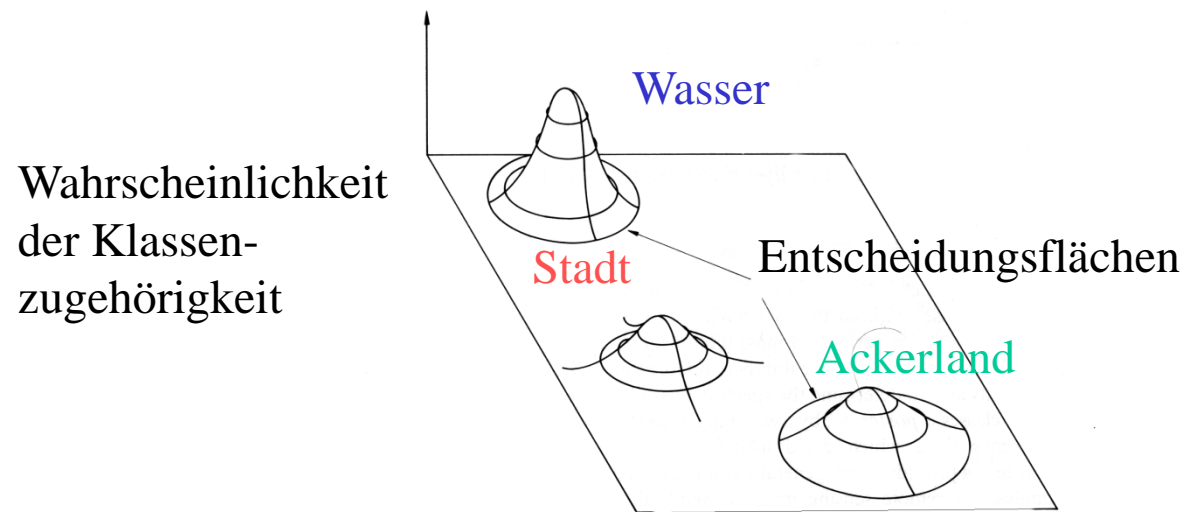


Grundlagen

Anwendung des Bayes-Klassifikators mit Gauß Prozess

Schätzung der $P(o|C)$ ohne Annahme der bedingten Unabhängigkeit

Annahme einer d -dimensionalen Normalverteilung für die Grauwertvektoren einer Klasse



Methode

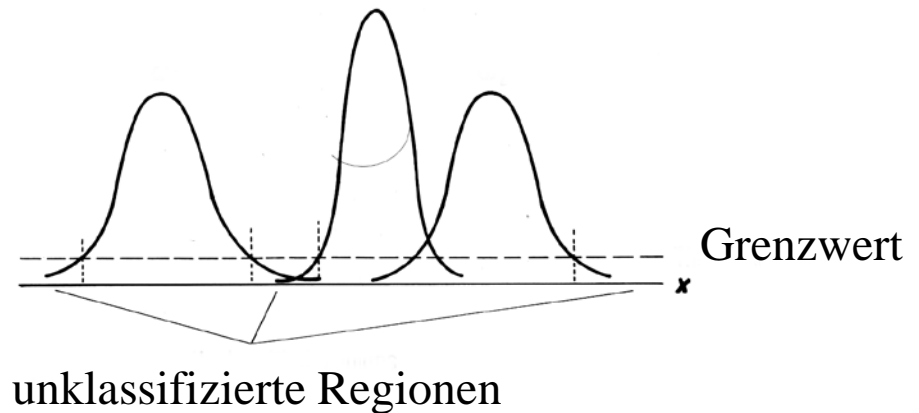
Zu schätzen aus den Trainingsdaten:

μ_i : d -dimensionaler Mittelwertvektor aller Feature-Vektoren der Klasse C_i

Σ_i : $d \times d$ Kovarianzmatrix der Klasse C_i

Probleme der Entscheidungsregel:

- Wahrscheinlichkeit für die gewählte Klasse sehr klein
- Wahrscheinlichkeit für mehrere Klassen ähnlich



Diskussion

- + hohe Klassifikationsgenauigkeit in vielen Anwendungen
- + Inkrementalität: Klassifikator kann einfach an neue Trainingsobjekte adaptiert werden
- + Einbezug von Anwendungswissen

- Anwendbarkeit (Bayes-Netzwerke): die erforderlichen bedingten Wahrscheinlichkeiten sind oft unbekannt
- Ineffizienz bei sehr vielen Attributen (insbesondere Bayes-Netzwerke)