

Skript zur Vorlesung
Knowledge Discovery in Databases
im Sommersemester 2014

Kapitel 3: Clustering

Vorlesung: PD Dr. Arthur Zimek
Übungen: Dr. Erich Schubert

Skript © 2014 Johannes Aßfalg, Christian Böhm, Karsten Borgwardt, Martin Ester, Eshref Januzaj, Karin Kailing, Peer Kröger, Jörg Sander, Matthias Schubert, Arthur Zimek

[http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge_Discovery_in_Databases_I_\(KDD_I\)](http://www.dbs.ifi.lmu.de/cms/Knowledge_Discovery_in_Databases_I_(KDD_I))

Ziel des Clustering

Identifikation einer endlichen Menge von Kategorien, Klassen oder Gruppen (*Cluster*) in den Daten.

Ähnliche Objekte sollen im *gleichen* Cluster sein, *unähnliche* Objekte sollen in *unterschiedlichen* Clustern sein.



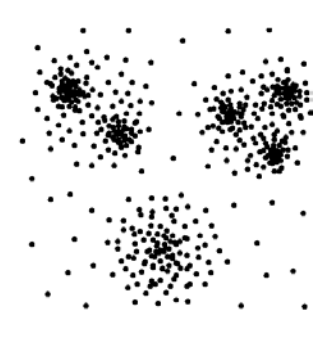
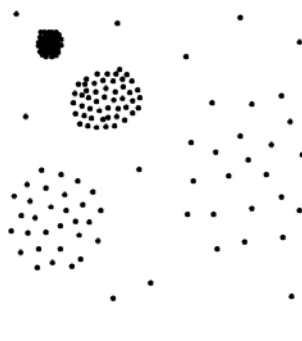
- Clustering ist unsupervised, d.h. wir haben keine äußeren Anhaltspunkte zur Steuerung/Überwachung (supervision) des Verfahrens:
 - keine Regeln zur Einordnung der Punkte in Cluster lernbar
 - wir wissen nicht, wie viele Cluster vorhanden sind
 - wir wissen nicht, wie die einzelnen Cluster charakterisiert sind
 - keine eindeutige Beurteilung der Qualität eines gefundenen Clusterings (Evaluation)



- Herausforderungen
 - gegeben: eine hypothetische Funktion f , die für eine Menge von n Datenobjekten entscheidet, ob sie einen (guten) Cluster bilden
 - naive Methode: werte Funktion f aus für alle möglichen Partitionierungen in k Teilmengen von Objekten ($2 \leq k \leq ?$)
 - Problem:
 - Es gibt $O(k^n)$ viele Partitionierungen in k Teilmengen.
 - Wie sieht diese Funktion f überhaupt aus?
 - Lösung: wir brauchen **Heuristiken** für beide Teilprobleme
 - Effiziente Suche nach Lösungen
 - Effiziente und effektive Modellierung der hypothetischen Funktion f
- => es gibt sehr viele verschiedene Clustering-Algorithmen

Typen von Clustering Verfahren

- Partitionierende Verfahren
 - Modell: Cluster sind kompakt zusammenliegende Datenobjekte
 - Parameter: (meist) Anzahl k der Cluster (d.h. Annahme: Anzahl der Cluster bekannt), Distanzfunktion
 - sucht ein „flaches“ Clustering (Partitionierung in k Cluster mit maximaler Kompaktheit)



Typen von Clustering Verfahren

• Dichte-basierte Verfahren

- Modell: Cluster sind Räume mit hoher Punktdichte separiert durch Räume niedriger Punktdichte
- Parameter: minimale Dichte in einem Cluster, Distanzfunktion (d.h. Annahme: erwartete Dichte für Cluster bekannt)
- sucht flaches Clustering: typischer Ansatz erweitert Punkte um ihre Nachbarn solange Dichte groß genug



Typen von Clustering Verfahren

- Hierarchische Verfahren
 - Modell: Kompaktheit, Dichte, ...
 - Parameter: Distanzfunktion für Punkte und für Cluster
 - bestimmt Hierarchie von Clustern (z.B. in Form eines Baumes darstellbar), mischt jeweils die ähnlichsten Cluster
 - Flaches Clustering kann durch Abschneiden des Baumes erzeugt werden.
- Andere (Fuzzy Clustering, Graph-theoretische Verfahren, Neuronale Netze...)



Grundlagen

Ziel: Partitionierung in k Cluster, so dass eine Kostenfunktion minimiert wird (Gütekriterium: Kompaktheit)

Zentrale Annahmen:

- Anzahl k der Cluster bekannt (Eingabeparameter)
- Clustercharakteristik: Kompaktheit
- Kompaktheit: Abweichung aller Objekte im Cluster von einem ausgezeichneten Cluster-Repräsentanten ist minimal
- Kompaktheitskriterium führt meistens zu sphärisch geformten Clustern

Grundlagen

Erschöpfende (globale) Suche ist zu ineffizient (WARUM?)

Daher: Lokal optimierende Verfahren

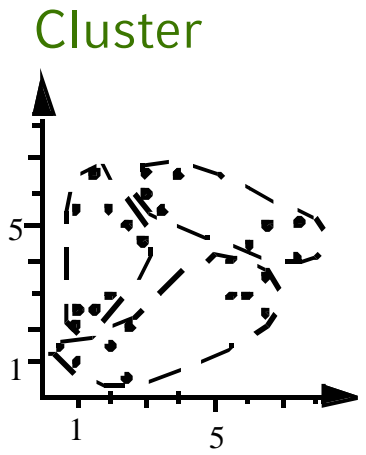
- wähle k initiale Cluster-Repräsentanten
- optimiere diese Repräsentanten iterativ
- ordne jedes Objekt seinem ähnlichsten Repräsentanten zu

Typen von Cluster-Repräsentanten

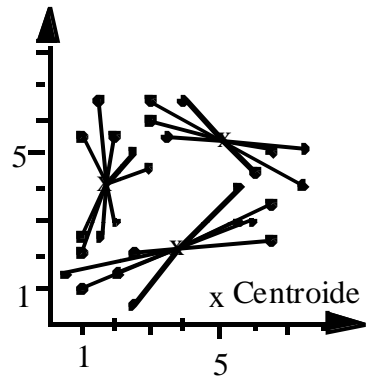
- Mittelwert des Clusters (*Konstruktion zentraler Punkte*)
- Element des Clusters (*Auswahl repräsentativer Punkte*)
- Wahrscheinlichkeitsverteilung des Clusters (*Erwartungsmaximierung*)

Konstruktion zentraler Punkte (Beispiel)

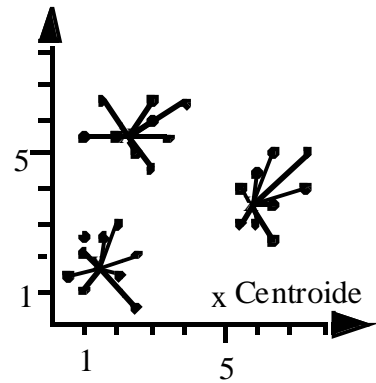
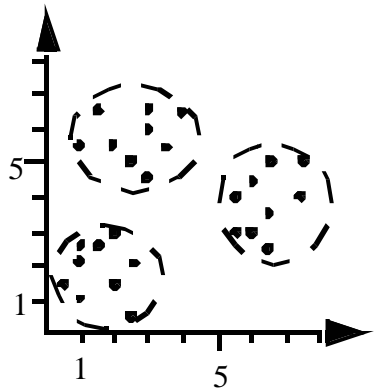
schlechtes Clustering



Cluster-Repräsentanten



optimales Clustering



Konstruktion zentraler Punkte (Grundbegriffe)

[Forgy 1965]

- Objekte sind Punkte $x=(x_1, \dots, x_d)$ in einem euklidischen Vektorraum
dist = euklidische Distanz (L_2 -Norm)
- *Centroid* μ_C : Mittelwert aller Punkte im Cluster C
- *Maß für die Kosten* (Kompaktheit) eines Clusters C

$$TD^2(C) = \sum_{p \in C} dist(p, \mu_C)^2$$

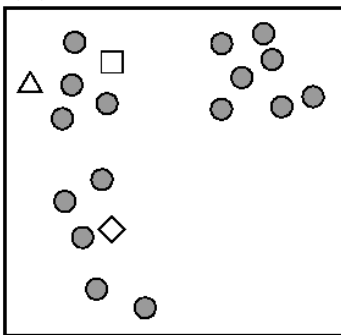
- *Maß für die Kosten* (Kompaktheit) eines Clustering

$$TD^2(C_1, \dots, C_k) = \sum_{i=1}^k TD^2(C_i)$$

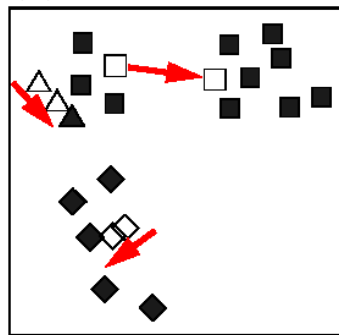
Idee des Algorithmus

- Algorithmus startet mit (z.B. zufällig gewählten) Punkten als Cluster-Repräsentanten
- Der Algorithmus besteht aus zwei alternierenden Schritten:
 - Zuordnung jedes Datenpunktes zum räumlich nächsten Repräsentanten
 - Neuberechnung der Repräsentanten (Centroid der zugeordneten Punkte)
- Diese Schritte werden so lange wiederholt, bis sich keine Änderung mehr ergibt

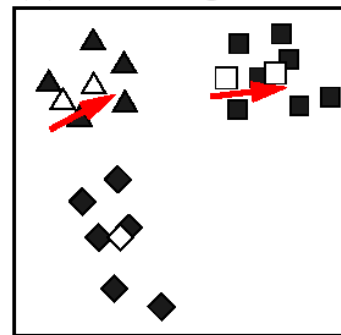
(a) Initialization



(b) First Iteration



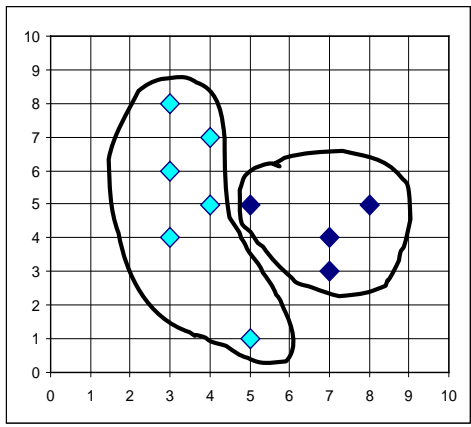
(c) Convergence



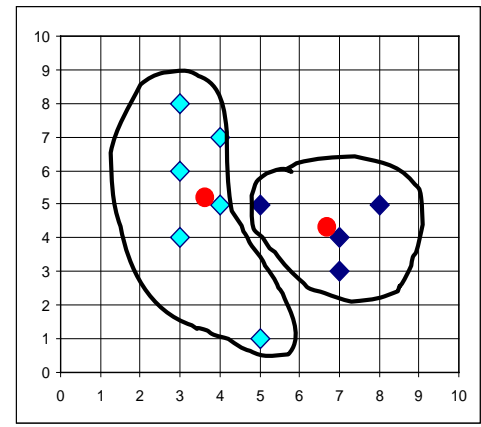
Algorithmus [Lloyd 1957]

```
ClusteringDurchVarianzMinimierung(Punktmenge D, Integer k)
  Erzeuge eine „initiale“ Zerlegung der Punktmenge D in k
  Klassen;
  Berechne die Menge  $C' = \{C_1, \dots, C_k\}$  der Centroide für
  die k Klassen;
  C = {};
  repeat
    C = C';
    Bilde k Klassen durch Zuordnung jedes Punktes zum
    nächstliegenden Centroid aus C;
    Berechne die Menge  $C' = \{C'_1, \dots, C'_k\}$  der Centroide
    für die neu bestimmten Klassen;
  until C = C';
  return C;
```

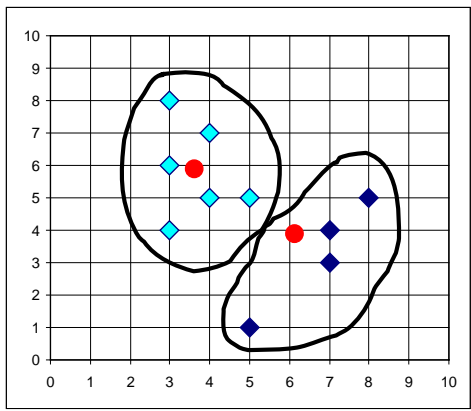
Beispiel



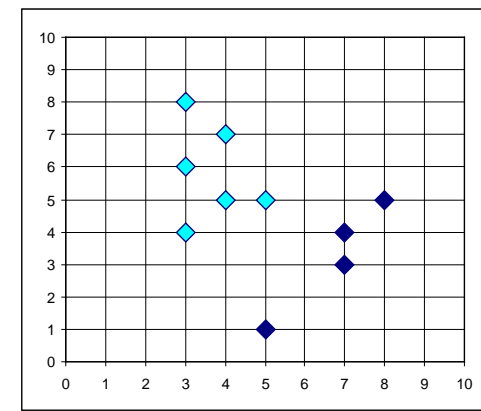
Berechnung der neuen Centroide



Zuordnung zum nächsten Centroid

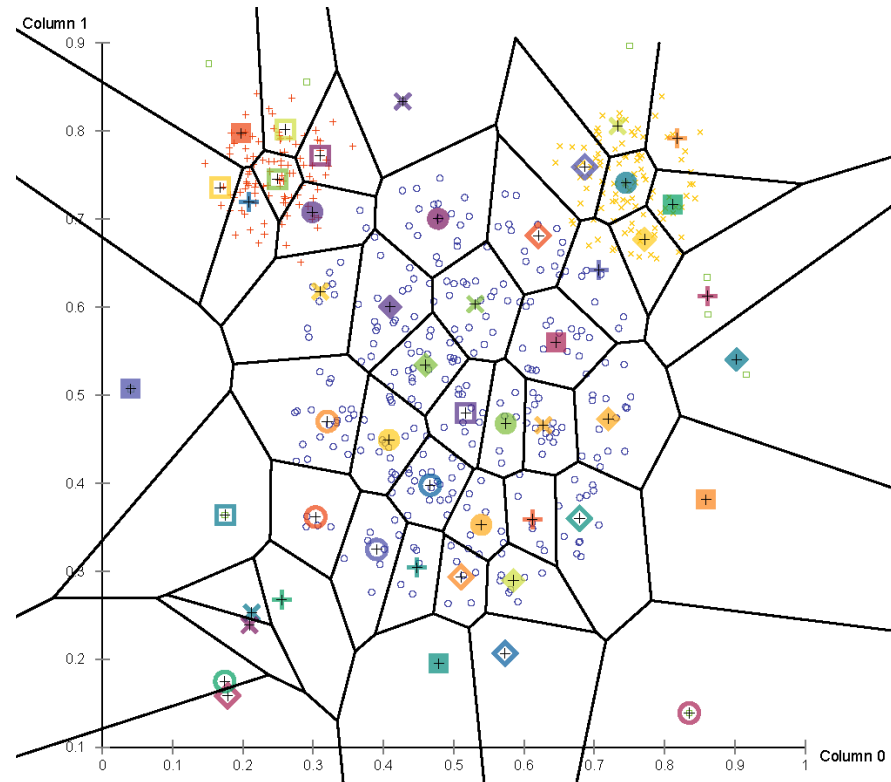
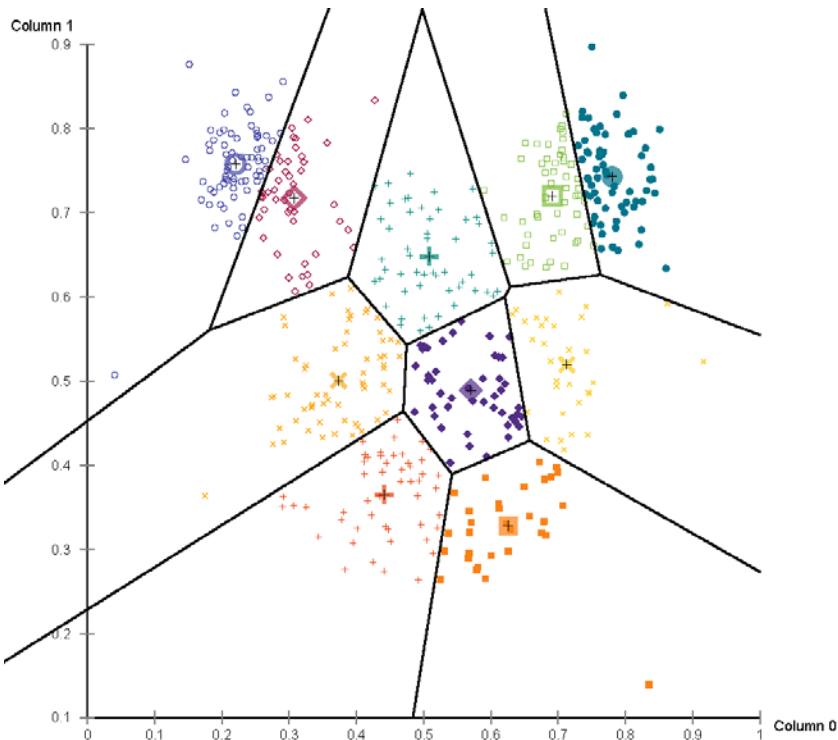


Berechnung der neuen Centroide

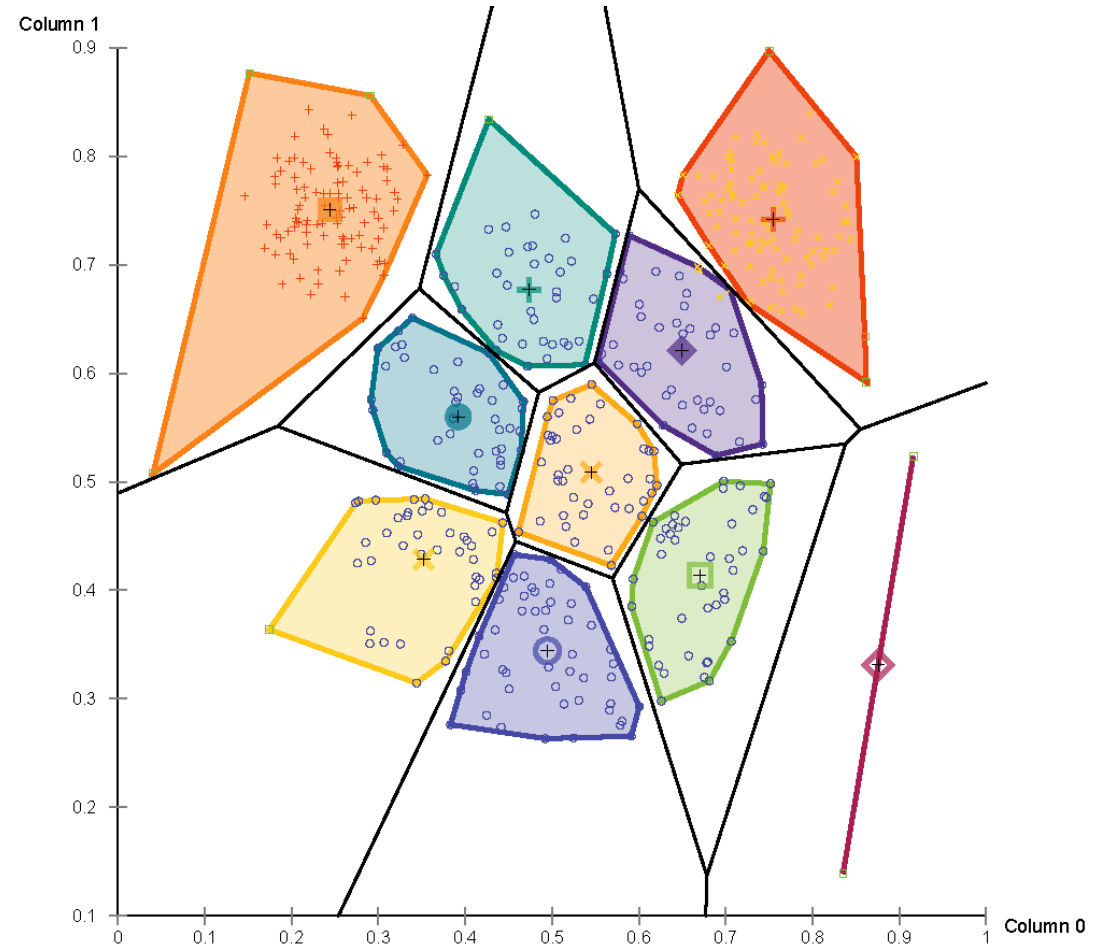


Model:

- Zuordnung der Punkte zum nächst-gelegenen Cluster-Repräsentanten
- entspricht Voronoi-Parzellierung



Voronoi-Parzellierung \neq konvexe Hülle



Bekannteste Variante des Basis-Algorithmus

k-means [MacQueen 67]

Idee: die betroffenen Centroide werden direkt aktualisiert, wenn ein Punkt seine Clusterzugehörigkeit ändert

- *k-means* hat im wesentlichen die Eigenschaften des Basis-Algorithmus
- *k-means* ist aber reihenfolgeabhängig

Achtung:

Der Name „*k-means*“ wird oft undifferenziert für verschiedene Varianten der Grundidee verwendet, insbesondere auch für den Algorithmus von Lloyd.

Diskussion

- + Effizienz
Aufwand: $O(k \cdot n)$ für eine Iteration (k kann für kleine Anzahl von Clustern vernachlässigt werden), Anzahl der Iterationen ist im allgemeinen klein ($\sim 5 - 10$).
- + einfache Implementierung
⇒ populärstes partitionierendes Clustering-Verfahren
- Anfälligkeit gegenüber Rauschen und Ausreißern
(alle Objekte gehen in die Berechnung des Zentroids ein)
- Cluster müssen konvexe Form haben
- die Anzahl k der Cluster ist oft schwer zu bestimmen
- starke Abhängigkeit von der initialen Zerlegung
(sowohl Ergebnis als auch Laufzeit)

Auswahl repräsentativer Punkte

[Kaufman & Rousseeuw 1990]

- setze nur Distanzfunktion (*dist*) für Paare von Objekten voraus
- *Medoid*: ein zentrales Element des Clusters (repräsentatives Objekt)
- Maß für die Kosten (Kompaktheit) eines Clusters C mit Medoid m_C

$$TD(C) = \sum_{p \in C} dist(p, m_C)$$

- Maß für die Kosten (Kompaktheit) eines Clustering

$$TD(C_1, \dots, C_k) = \sum_{i=1}^k TD(C_i)$$

Überblick über *k-medoid* Algorithmen

PAM [Kaufman & Rousseeuw 1990]

- Greedy-Algorithmus:
in jedem Schritt wird nur ein Medoid mit einem Nicht-Medoid vertauscht
- vertauscht in jedem Schritt das Paar (Medoid, Nicht-Medoid), das die größte Reduktion der Kosten *TD* bewirkt

CLARANS [Ng & Han 1994]

- zwei zusätzliche Parameter: *maxneighbor* und *numlocal*
- höchstens *maxneighbor* viele von zufällig ausgewählten Paaren (Medoid, Nicht-Medoid) werden betrachtet
- die erste Ersetzung, die überhaupt eine Reduzierung des *TD*-Wertes bewirkt, wird auch durchgeführt
- die Suche nach *k* „optimalen“ Medoiden wird *numlocal* mal wiederholt

Algorithmus PAM

```
PAM(Punktmenge D, Integer k)
  Initialisiere die k Medoide;
  TD_Änderung :=  $-\infty$ ;
  while TD_Änderung < 0 do
    Berechne für jedes Paar (Medoid M, Nicht-Medoid N)
      den Wert  $TD_{N \leftrightarrow M}$ ;
    Wähle das Paar (M, N), für das der Wert
      TD_Änderung :=  $TD_{N \leftrightarrow M} - TD$  minimal ist;
    if TD_Änderung < 0 then
      ersetze den Medoid M durch den Nicht-Medoid N;
      Speichere die aktuellen Medoide als die bisher beste
        Partitionierung;
  return Medoide;
```

Algorithmus CLARANS

```
CLARANS(Punktmenge D, Integer k,  
         Integer numlocal, Integer maxneighbor)  
for r from 1 to numlocal do  
    wähle zufällig k Objekte als Medoide; i := 0;  
    while i < maxneighbor do  
        Wähle zufällig (Medoid M, Nicht-Medoid N);  
        Berechne TD_Änderung :=  $TD_{N \leftrightarrow M} - TD$ ;  
        if TD_Änderung < 0 then  
            ersetze M durch N;  
            TD :=  $TD_{N \leftrightarrow M}$ ; i := 0;  
        else i := i + 1;  
    if TD < TD_best then  
        TD_best := TD; Speichere aktuelle Medoide;  
return Medoide;
```

Vergleich von PAM und CLARANS

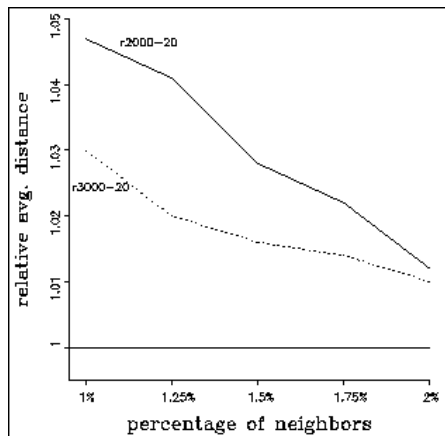
Laufzeitkomplexitäten

PAM: $O(n^3 + k(n-k)^2 * \#Iterationen)$

CLARANS: $O(numlocal * maxneighbor * \#Ersetzungen * n)$
praktisch $O(n^2)$

Experimentelle Untersuchung

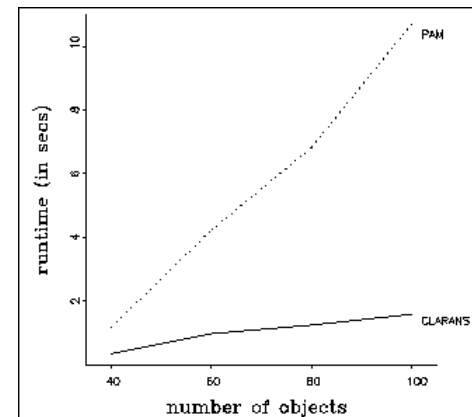
Qualität



TD(CLARANS)

TD(PAM)

Laufzeit



Erwartungsmaximierung (EM)

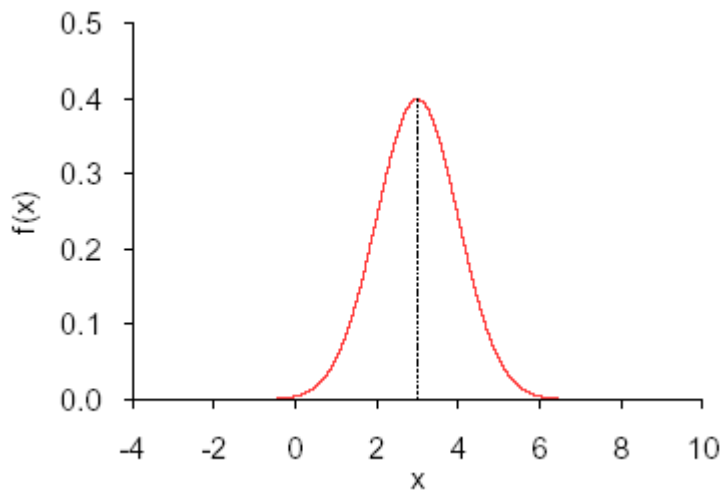
[Dempster, Laird & Rubin 1977]

- Objekte sind Punkte $x = (x_1, \dots, x_d)$ in einem euklidischen Vektorraum
- Ein Cluster wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben
- typisch: Modell für einen Cluster ist eine multivariate Normalverteilung
- Repräsentation eines Clusters C
 - Mittelwert μ_C aller Punkte des Clusters (Centroid)
 - $d \times d$ Kovarianzmatrix Σ_C für die Punkte im Cluster C
- Wahrscheinlichkeitsdichte eines Clusters C

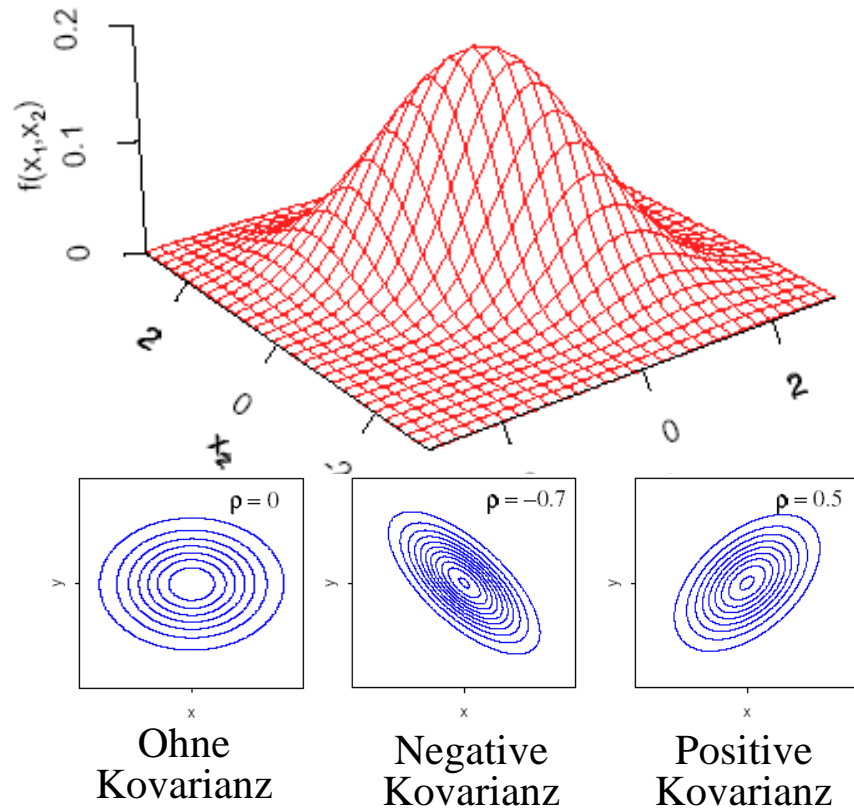
$$P(x | C) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_C|}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu_C)^T \cdot (\Sigma_C)^{-1} \cdot (x - \mu_C)}$$

Multivariate Normalverteilung

Univariate Normalverteilung



Bivariate Normalverteilung

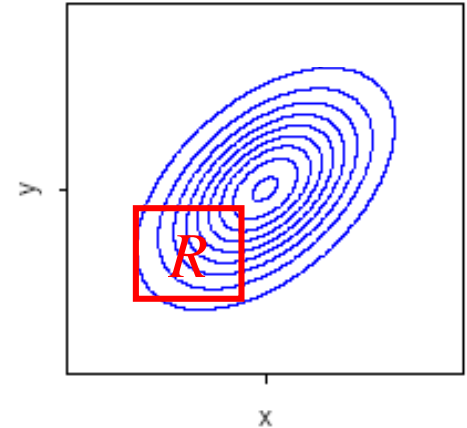


Idee des EM-Algorithmus:

- Jeder Punkt gehört zu mehreren (eigentlich *allen*) Clustern, jeweils mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit, abh. v. $P(x|C)$
- Algorithmus besteht wieder aus zwei alternierenden Schritten:
 - Zuordnung von Punkten zu Clustern (hier nicht absolut sondern relativ/nach Wahrscheinlichkeit)
 - Neuberechnung der Cluster-Repräsentanten (multivariate Normalverteilungen)
- Alles muss auf eine stochastische Grundlage gestellt werden:
 - Bei Berechnung der Clusterzentren (μ_C) muss berücksichtigt werden, dass Punkte Clustern nicht absolut, sondern nur relativ zugeordnet sind
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Clusterzugehörigkeit?

Jeder Cluster C_i wird durch eine Wahrscheinlichkeits-Dichte-Funktion (Normalverteilung) modelliert:

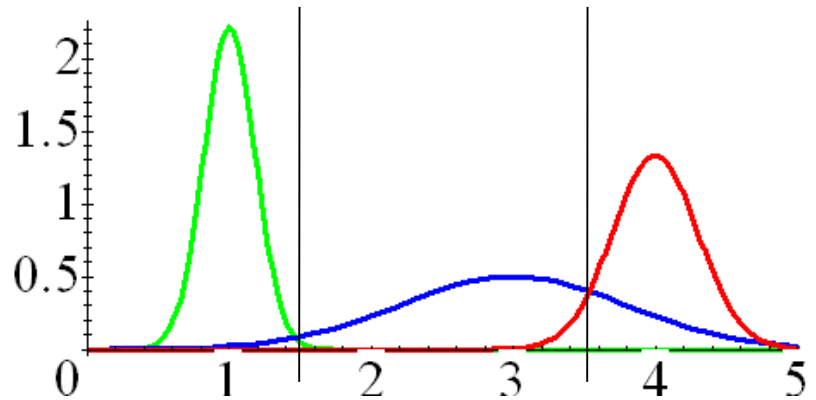
$$P(x | C_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_{C_i}|}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu_{C_i})^T \cdot (\Sigma_{C_i})^{-1} \cdot (x - \mu_{C_i})}$$



Dichtefunktion:

- Integral über den Gesamttraum ergibt 1
- Integral über Region R ergibt Wahrscheinlichkeit, dass ein fiktiver Punkt des Clusters in dieser Region des Clusters liegt, bzw. den relativen Anteil (z.B. 30%) der Punkte des Clusters, die in R liegen

$$P(x | C_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma_{C_i}|}} e^{-\frac{1}{2} \cdot (x - \mu_{C_i})^T \cdot (\Sigma_{C_i})^{-1} \cdot (x - \mu_{C_i})}$$



Interpretation der Wahrscheinlichkeit:

- Dies würde unter der Voraussetzung gelten, dass der Punkt x ausschließlich dem Cluster C_i zugeordnet wäre (was nicht stimmt)
- Deshalb Notation als *bedingte* Wahrscheinlichkeit

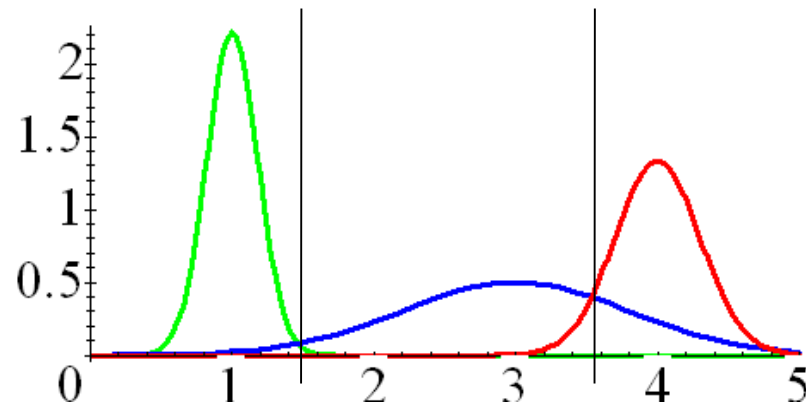
Bei k Gauß-Verteilungen (durch k Cluster) ergibt sich folgende Gesamt-Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k W_i \cdot P(x | C_i)$$

wobei W_i der relative Anteil der Datenpunkte ist, der zum Cluster C_i gehört (z.B. 5%), was man auch als Gesamt-Wahrscheinlichkeit des Clusters $P(C_i)$ interpretieren kann.

Satz von Bayes:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



Mit dem *Satz von Bayes* kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein gegebener Punkt x zum Cluster C_i gehört, geschrieben als bedingte Wahrscheinlichkeit $P(C_i|x)$

$$P(C_i|x) = W_i \cdot \frac{P(x|C_i)}{P(x)}$$

- Maß für die Güte eines Clustering M

$$E(M) = \sum_{x \in D} \log(P(x))$$

⇒ $E(M)$ soll maximiert werden.

- Anteil des Clusters an der Datenmenge:

$$W_i = P(C_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P(C_i | x_j)$$

- Mittelwert und Kovarianzmatrix der Gaußverteilung:

$$\mu_i = \frac{\sum_{x \in D} x \cdot P(C_i | x)}{\sum_{x \in D} P(C_i | x)}$$

$$\Sigma_i = \frac{\sum_{x \in D} (x - \mu_i)(x - \mu_i)^T \cdot P(C_i | x)}{\sum_{x \in D} P(C_i | x)}$$

Algorithmus

```

ClusteringDurchErwartungsmaximierung(Punktmenge D, Integer k)
  Erzeuge ein „initiales“ Modell  $M' = (C_1', \dots, C_k')$ ;
  repeat // „Neuzuordnung“
    Berechne  $P(x|C_i)$ ,  $P(x)$  und  $P(C_i|x)$  für jedes Objekt aus
      D und jede Gaußverteilung/jeden Cluster  $C_i$ ;
    // „Neuberechnung des Modells“
    Berechne ein neues Modell  $M = \{C_1, \dots, C_k\}$  durch
      Neuberechnung von  $W_i$ ,  $\mu_C$  und  $\Sigma_C$  für jedes  $i$ ;
     $M' := M$ ;
  until  $|E(M) - E(M')| < \epsilon$ ;
  return M;
  
```

Diskussion

- Aufwand:

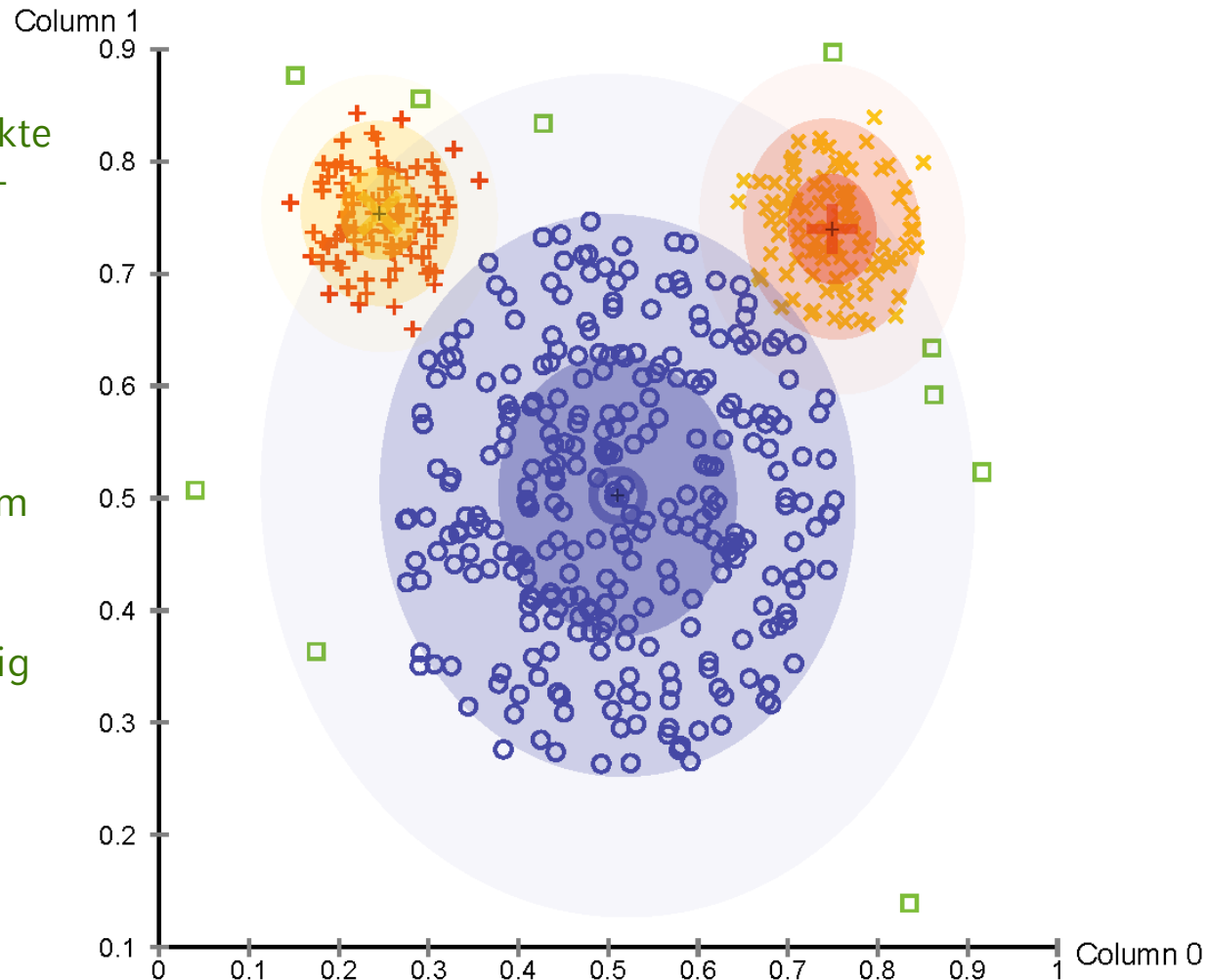
$$O(n * |M| * \#Iterationen)$$

Anzahl der benötigten Iterationen im allgemeinen sehr hoch

- Ergebnis und Laufzeit hängen (wie beim *k-means* und *k-medoid*) stark ab
 - von der initialen Zuordnung
 - von der „richtigen“ Wahl des Parameters *k*
- Modifikation für Partitionierung der Daten in *k disjunkte* Cluster:
jedes Objekt nur demjenigen Cluster zuordnen, zu dem es am wahrscheinlichsten gehört.

Model:

- (anteilige) Zuordnung der Punkte zum nächst-gelegenen Cluster-Repräsentanten
- „nächst-gelegene“: bestimmt durch Mahalanobis-Distanz:
 - Distanz quadratischer Form
 - Distanz-Matrix vom jeweiligen Cluster abhängig (Kovarianz-Matrix der zugeordneten Punkte)



Wahl des initialen Clusterings

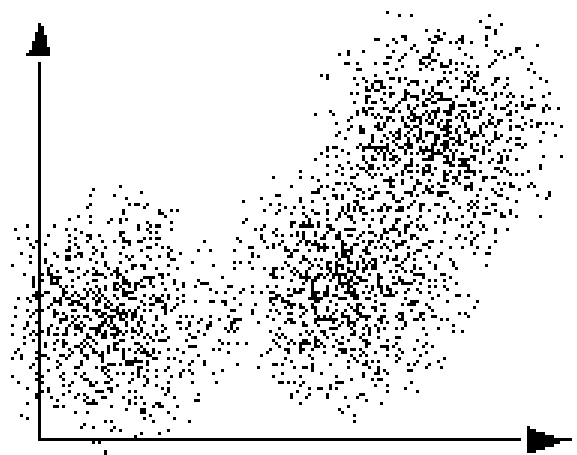
Idee

- Clustering einer kleinen Stichprobe liefert im allgemeinen gute initiale Cluster einzelne Stichproben sind evtl. deutlich anders verteilt als die Grundgesamtheit

Methode [Fayyad, Reina & Bradley 1998]

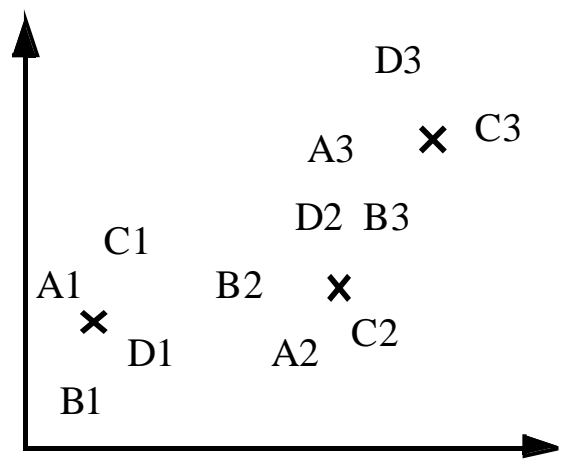
- ziehe unabhängig voneinander m verschiedene Stichproben
- clustere jede der Stichproben
 $\implies m$ verschiedene Schätzungen für k Clusterzentren
 $A = (A_1, A_2, \dots, A_k), B = (B_1, \dots, B_k), C = (C_1, \dots, C_k), \dots$
- Clustere nun die Menge $DB = A \cup B \cup C \cup \dots$ mit m verschiedenen Schätzungen der Zentren A, B, C, \dots als Startkonfiguration
- Wähle von den m Clusterings dasjenige mit dem besten Wert bezüglich des zugehörigen Maßes für die Güte eines Clusterings

Beispiel



Grundgesamtheit

$k = 3$ Gauß-Cluster



Clusterzentren

von $m = 4$ Stichproben

x wahre Clusterzentren

Wahl des Parameters k

Methode

- Bestimme für $k = 2, \dots, n-1$ (oder kleinere Grenze, z.B. $n/2, \sqrt{n}$) jeweils ein Clustering
- Wähle aus der Menge der Ergebnisse das „beste“ Clustering aus

Maß für die Güte eines Clusterings

- muss unabhängig von der Anzahl k sein
- bei k -means und k -medoid: TD^2 und TD sinken monoton mit steigendem k
- bei EM: E steigt monoton mit steigendem k (\Rightarrow „overfitting“)
- wir brauchen ein von k unabhängiges Gütemaß für die k -means- und k -medoid-Verfahren

\Rightarrow *Silhouetten-Koeffizient*

(Vereinfachter) *Silhouetten-Koeffizient* [Kaufman & Rousseeuw 1990]

- sei $a(o)$ der Abstand eines Objekts o zum Repräsentanten seines Clusters und $b(o)$ der Abstand zum Repräsentanten des „zweitnächsten“ Clusters
- Silhouette $s(o)$ von o :

$$s(o) = \frac{b(o) - a(o)}{\max\{a(o), b(o)\}}$$

$$-1 \leq s(o) \leq +1$$

$s(o) \approx -1 / 0 / +1$: *schlecht / indifferent / gute Zuordnung*

- Silhouettenkoeffizient s_C eines Clustering durchschnittliche Silhouette aller Objekte
- Interpretation des Silhouettenkoeffizients
 - $s_C > 0,7$: starke Struktur,
 - $s_C > 0,5$: brauchbare Struktur, . . .

k-modes Verfahren [Huang 1997]

- *k-medoid*-Algorithmus wesentlich langsamer als *k-means*-Algorithmus
- *k-means*-Verfahren nicht direkt für kategoriale Attribute anwendbar

⇒ gesucht ist ein Analogon zum Centroid eines Clusters

- Numerische Attribute

Centroid \bar{x} einer Menge C von Objekten minimiert $TD(C, \bar{x}) = \sum_{p \in C} dist(p, \bar{x})$

- Kategoriale Attribute

Mode m einer Menge C von Objekten minimiert $TD(C, m) = \sum_{p \in C} dist(p, m)$

(m ist nicht unbedingt ein Element der Menge C)

- $m = (m_1, \dots, m_d)$, $dist$ eine Distanzfunktion für kategoriale Attribute, z.B.

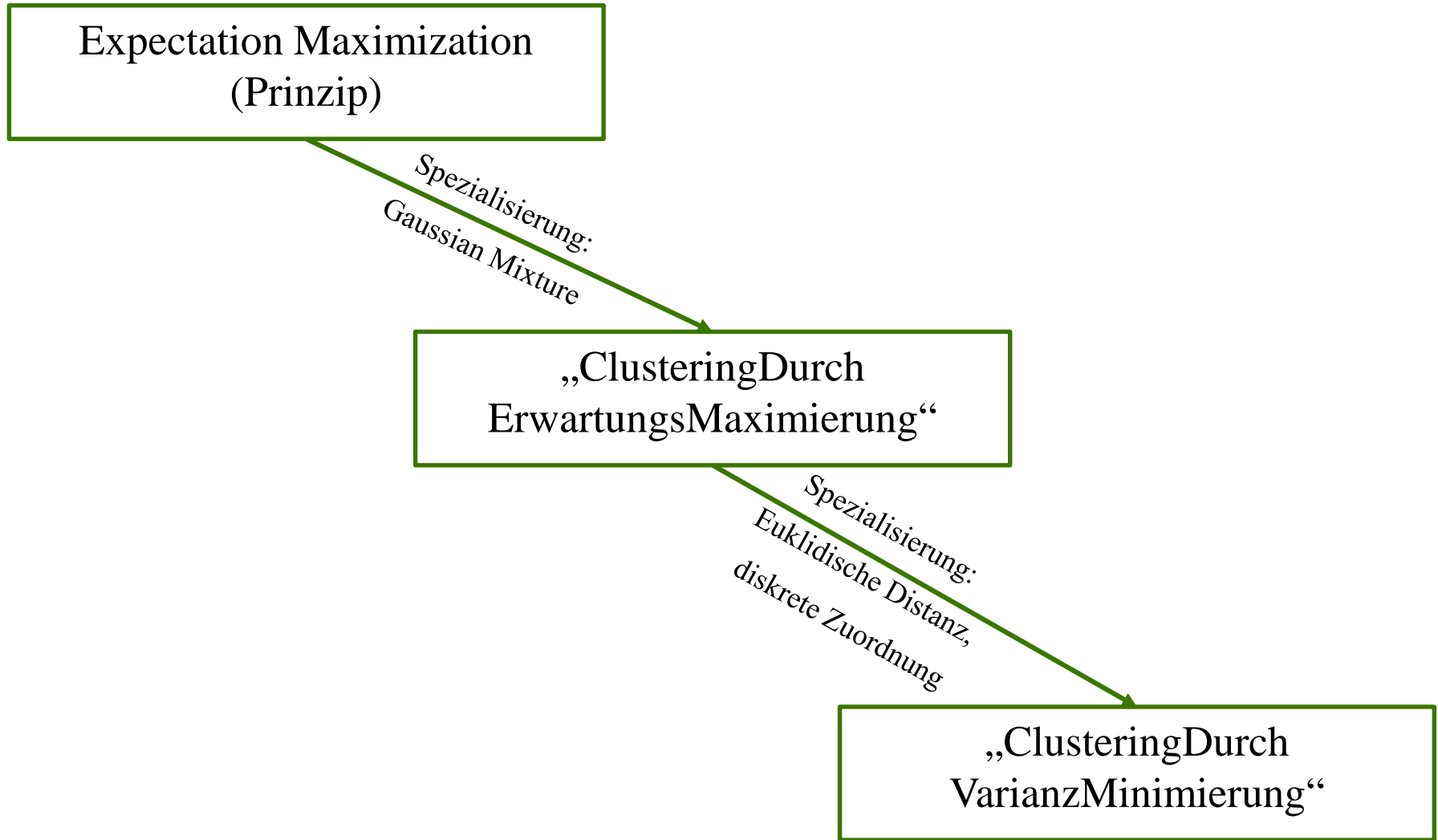
$$dist(x, y) = \sum_{i=1}^d \delta(x_i, y_i) \text{ mit } \delta(x_i, y_i) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x_i = y_i \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmung des Modes

- Die Funktion $TD(C, m) = \sum_{p \in C} dist(p, m)$ wird genau dann minimiert, wenn für $m = (m_1, \dots, m_d)$ und für alle Attribute A_i , $i = 1, \dots, d$, gilt:
 - Es gibt in A_i keinen häufigeren Attributwert als m_i
- Der Mode einer Menge von Objekten ist nicht eindeutig bestimmt.
- Beispiel
 Objektmenge $\{(a, b), (a, c), (c, b), (b, c)\}$
 (a, b) ist ein Mode
 (a, c) ist ein Mode

Algorithmus k-modes

- Initialisierung
 - keine zufällige Partitionierung
 - sondern k Objekte aus der Datenmenge als initiale *Modes*
- Cluster-Repräsentanten
 - Mode anstelle des Centroids
- Distanzfunktion
 - anstelle der quadrierten euklidischen Distanz
 - Distanzfunktion für Datensätze mit kategorischen Attributen



Literatur

- A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1):1–31, 1977.
- Usama M. Fayyad, Cory Reina, Paul S. Bradley: Initialization of Iterative Refinement Clustering Algorithms. *KDD 1998*: 194-198
- E. W. Forgy: Cluster analysis of multivariate data: efficiency vs interpretability of classifications. *Biometrics* 21, 768–769, 1965
- Z. Huang: A fast clustering algorithm to cluster very large categorical data sets in data mining. *Workshop on Research Issues on Data Mining and Knowledge Discovery*. 1997.
- L. Kaufman, P. J. Rousseeuw: *Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis*. John Wiley 1990
- S. P. Lloyd: Least square quantization in PCM. In: *Bell Telephone Laboratories Paper*. 1957
- J. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. In *5th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probabilistics*, volume 1, pages 281–297, 1967.
- R. Ng and J. Han. Efficient and effective clustering methods for spatial data mining. In *Proceedings of the 20th International Conference on Very Large Data Bases (VLDB)*, Santiago de Chile, Chile, 1994.

Partitionierende Verfahren: Was haben Sie gelernt?

- Was ist „Clustering“?
- Warum Heuristiken zur Identifikation von Clustern?
- grundlegende Heuristiken zur „Partitionierung“ in k Cluster:
 - Auswahl zentraler Punkte (Repräsentanten)
 - Optimierungsalgorithmen zur Zuordnung der Daten zu den Repräsentanten
 - Varianz-Minimierung
 - k-means-Verfahren
 - k-medoid-Verfahren
 - Erwartungs-Maximierung (Gaussian Mixture Modeling)
 - k-modes
 - Gemeinsamkeiten/Unterschiede dieser Verfahren
 - Vorteile/Nachteile der Verfahren