

Kapitel 6: Algorithmen der Computer-Geometrie

Skript zur Vorlesung
Geo-Informationssysteme

Wintersemester 2013/14

Ludwig-Maximilians-Universität München

(c) Peer Kröger 2011, basierend auf dem Skript von Christian Böhm aus dem
SoSe 2009



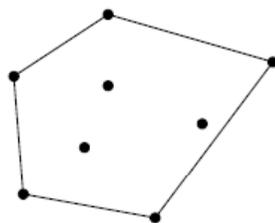
1. Einführung
2. Schnitt von zwei Strecken
3. Punkt-in-Polygon-Test
4. Schnitt orthogonaler Strecken
5. Punkteinschlussproblem

Computer Geometrie

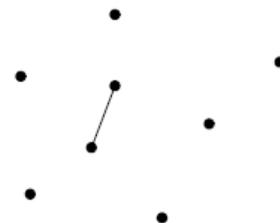
- Teilgebiet der Informatik, das sich mit der Lösung geometrischer Fragestellungen durch geeignete Algorithmen und Datenstrukturen beschäftigt
- Die algorithmische Lösung einer einfachen geometrischen Fragestellung kann sehr komplex sein (vom Algorithmus und/oder von der Laufzeit her)
- Die Algorithmische Geometrie legt ihren Schwerpunkt auf die Studie der algorithmischen Komplexität elementarer geometrischer Probleme
- Den Einsatz von geometrischen Algorithmen in einem GIS hat aber u.a. folgende Probleme:
 - Komplexität der Implementierung (viele Sonderfälle)
 - Anfälligkeit für Rundungsfehler
 - Hohe Konstanten bei der Laufzeitkomplexität

Wichtige Probleme

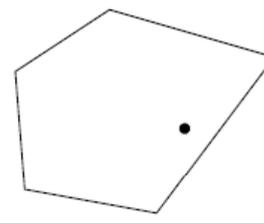
- Berechnung der konvexen Hülle
- Distanzprobleme:
 - Bestimme das Paar von Punkten mit minimalem Abstand
- Inklusionstest und -berechnungen:
 - Teste, ob ein Punkt im Inneren eines geschlossenen Polygons liegt
 - Bestimme alle Punkte, die in einem Rechteck liegen
- Zerlegungen von Objekten in Primitive:
 - Zerlege ein Polygon in eine minimale Anzahl von Dreiecken



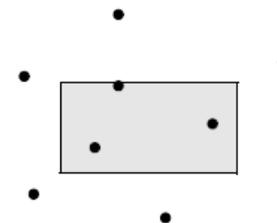
konvexe
Hülle



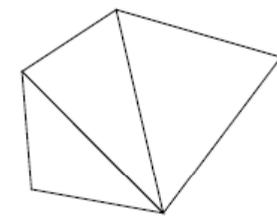
minimaler
Abstand



Punkt in
Polygon



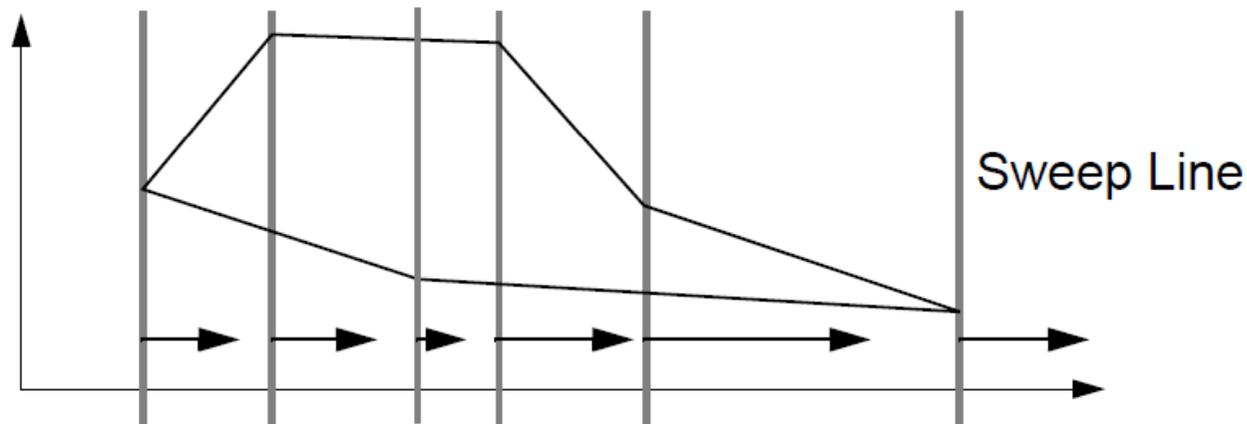
Punkte im
Rechteck



Zerlegung in
Dreiecke

Wichtige Paradigmen

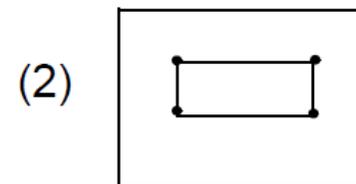
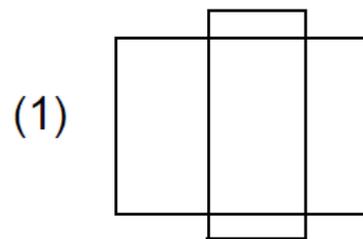
- *Plane-Sweep*
 - Verwendung einer vertikalen Lauflinie (*Sweep Line*)



- *Divide-and-Conquer (Teile und Herrsche)*
 - Aufteilen des Problems in Teilprobleme
 - Lösen der Teilprobleme
 - Kombinieren der Lösungsmengen der Teilprobleme

CG-Probleme beim Spatial Join

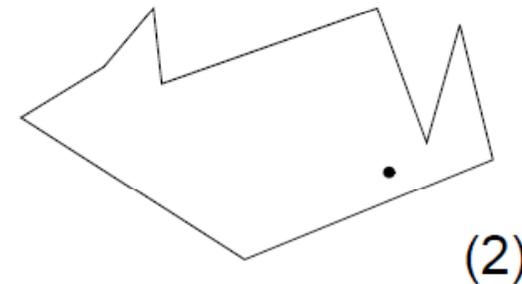
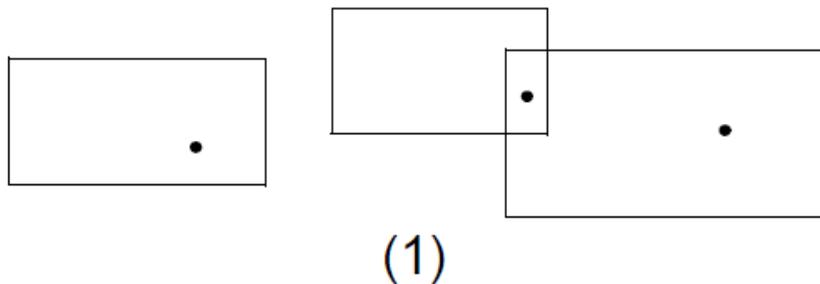
- “Welche Paare von MURs besitzen nichtleeren Schnitt?”
 - ⇒ Fall 1: ein Kantenpaar schneidet sich
 - ⇒ Schnitt einer Menge von orthogonalen Strecken (1)
 - ⇒ Fall 2: ein MUR liegt vollständig innerhalb des anderen
 - ⇒ Punkteinschlussproblem, d.h. Schnitt einer Menge von Punkten und einer Menge von Rechtecken (2)



- “Schneiden sich diese beiden Polygone?”
 - ⇒ Schnitt zweier Strecken

CG-Probleme bei Punktanfragen

- “Welche Punkte liegen in welchen dieser MURs?” (Spatial Join zwischen Punkten und MUR's) mit dem Prädikat “*Inklusion*”
⇒ Punkteinschlussproblem (1)
- “Liegt der Anfragepunkt in diesem Polygon?”
⇒ Punkt-In-Polygon Test (2)



CG-Probleme bei Fensteranfragen

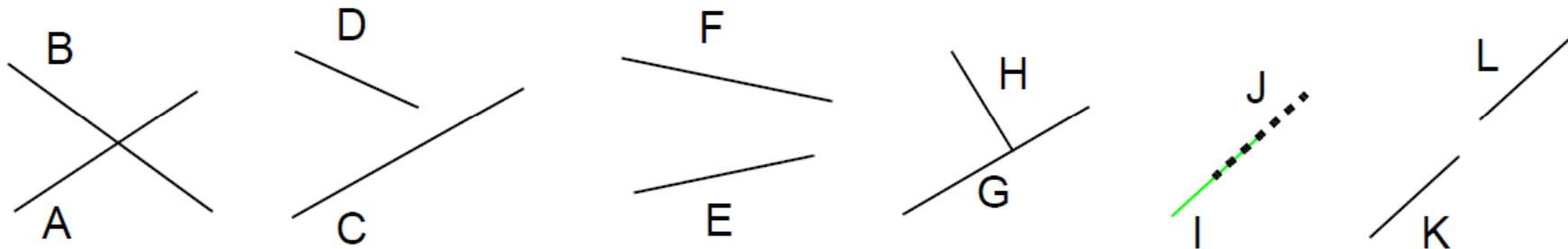
- “Welche dieser MURs schneiden das Anfragefenster?”
⇒ Schnitt einer Menge von orthogonalen Strecken
- “Schneidet das Anfragefenster dieses Polygon?”
⇒ Schnitt zweier Strecken

6.2 Schnitt von zwei Strecken (I)

Gegeben: zwei Strecken S1 und S2

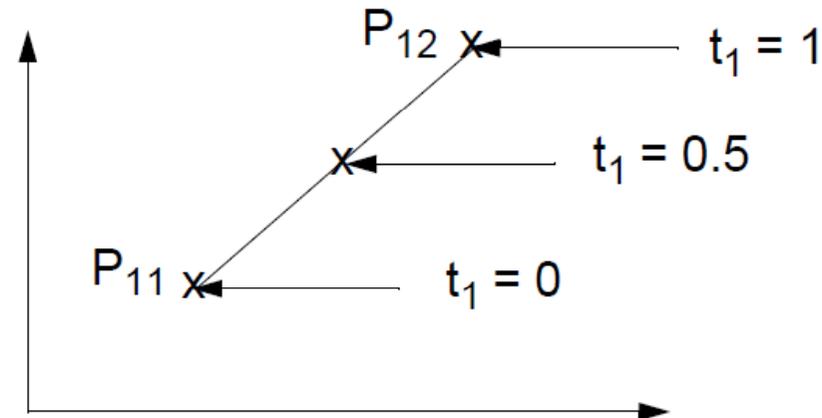
Gesucht: Schneiden sich S1 und S2? Wenn ja: ihr Schnittpunkt.

Fälle:



- Strecken A und B schneiden sich
- Strecken C und D und Strecken E und F schneiden sich nicht, jedoch schneiden sich ihre zugehörigen Geraden
- Strecken G und H berühren sich
- Strecken I und J liegen parallel und überlappen sich
- Strecken L und K liegen parallel und schneiden sich nicht

- Gegeben seien die beiden Strecken s_1 und s_2 durch die Eckpunkte P_{i1} und P_{i2}
- *Parameterdarstellung* mit $t_1, t_2 \in [0,1]$:
 - $s_1: (1-t_1) \cdot P_{11} + t_1 \cdot P_{12}$
 - $s_2: (1-t_2) \cdot P_{21} + t_2 \cdot P_{22}$



- 3 Fälle:
 1. s_1 und s_2 liegen auf der gleichen Geraden
 2. s_1 und s_2 liegen auf unterschiedlichen parallelen Geraden
 3. Die Geraden von s_1 und s_2 haben genau einen Schnittpunkt

Schnittpunktberechnung (Annahme: s1 und s2 weder horizontal noch vertikal)

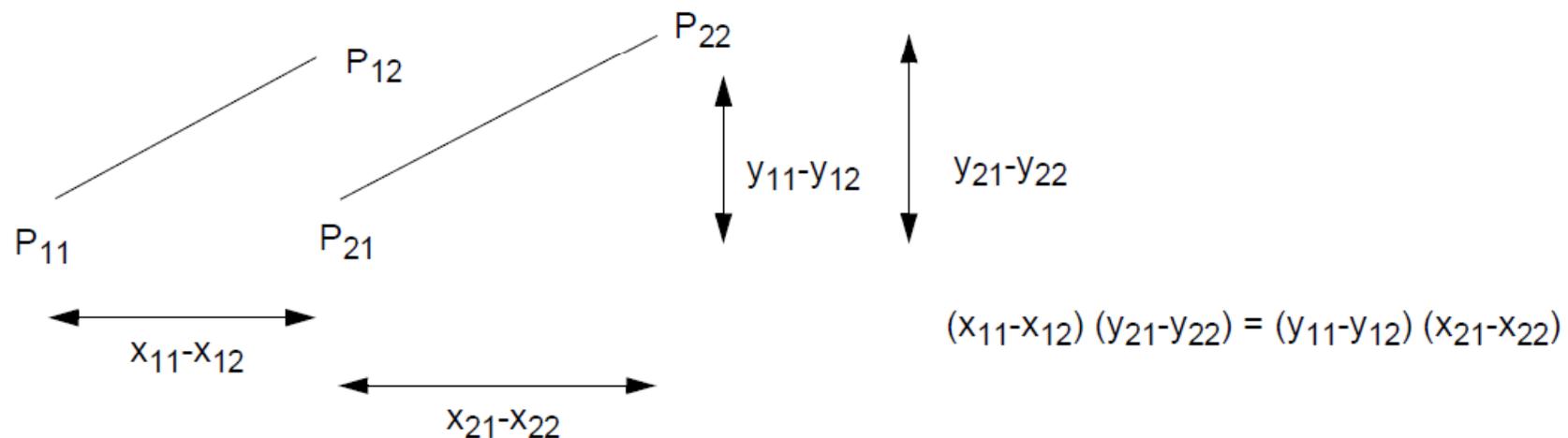
Notation: $x_{ij} := P_{ij}.x$ $y_{ij} := P_{ij}.y$

$$(1-t_1) \cdot x_{11} + t_1 \cdot x_{12} = (1-t_2) \cdot x_{21} + t_2 \cdot x_{22} \text{ // der Schnittpunkt erfüllt}$$

$$(1-t_1) \cdot y_{11} + t_1 \cdot y_{12} = (1-t_2) \cdot y_{21} + t_2 \cdot y_{22} \text{ // beide Streckengleichungen}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{(x_{11} - x_{21}) \cdot (y_{21} - y_{22}) - (y_{11} - y_{21}) \cdot (x_{21} - x_{22})}{(x_{11} - x_{12}) \cdot (y_{21} - y_{22}) - (y_{11} - y_{12}) \cdot (x_{21} - x_{22})}, t_2 \text{ analog}$$

Nenner gleich 0 \Rightarrow Strecken parallel (s_1 und s_2 haben die selbe Steigung)



Fallunterscheidung

- *Nenner gleich 0*

Teste, ob P_{11} oder P_{12} auf s_2 liegen, d.h. die Streckengleichung erfüllen.

- a) *P_{11} oder P_{12} liegen auf s_2*

Die Strecken s_1 und s_2 überlappen sich. Alle Punkte im Überlappungsbereich sind Schnittpunkte.

- b) *weder P_{11} noch P_{12} liegen auf s_2*

Die Strecken s_1 und s_2 liegen nebeneinander, sie besitzen keinen Schnittpunkt.

- *Nenner ungleich 0*

- a) *$0 \leq t_1 \leq 1$ und $0 \leq t_2 \leq 1$*

Die Strecken s_1 und s_2 schneiden sich. Berechnung des Schnittpunkts durch Einsetzen von t_i in Gleichung von s_i

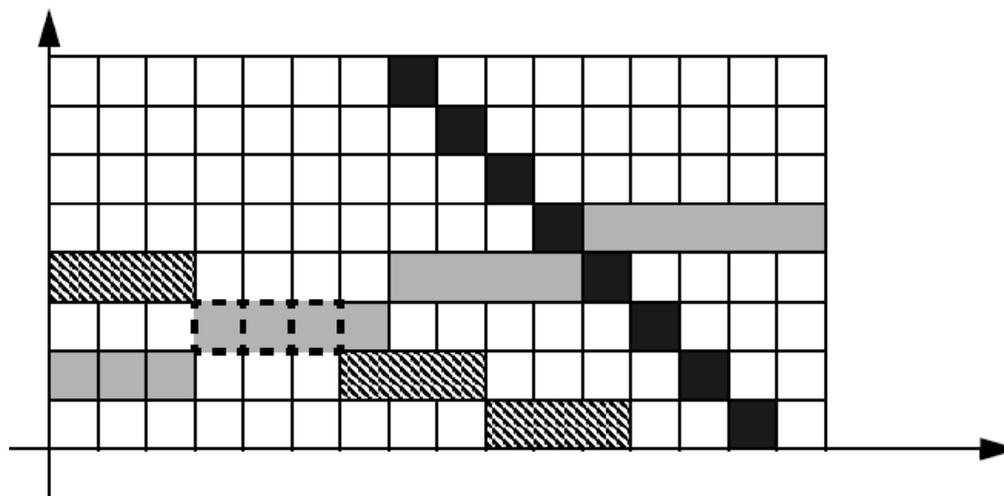
- b) *$t_1 < 0$ oder $t_1 > 1$ oder $t_2 < 0$ oder $t_2 > 1$*

Die Strecken s_1 und s_2 schneiden sich nicht.

Ungenauigkeiten im Rastermodell

Wieviele Schnittpunkte hat ein Paar von Strecken?

- Euklidische Geometrie: (höchstens) 1 Schnittpunkt
- Rastermodell: ???



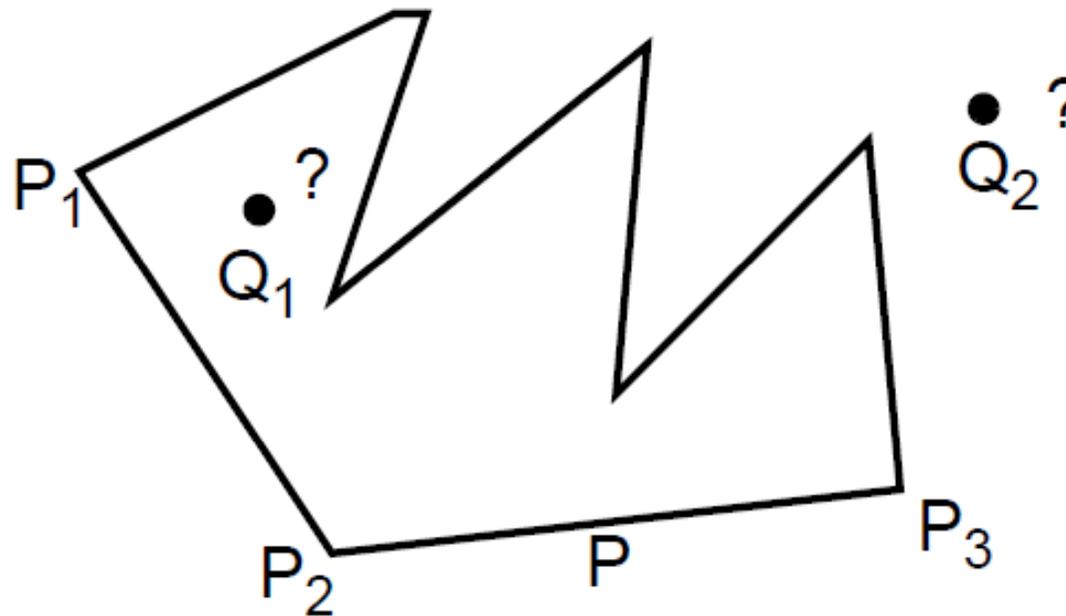
Strecke		besitzt mit Strecke		keinen gemeinsamen Schnittpunkt
Strecke		besitzt mit Strecke		drei gemeinsame Schnittpunkte
				

Gegeben

Ein einfaches Polygon $P = (P_1, \dots, P_n)$ und ein Anfragepunkt Q

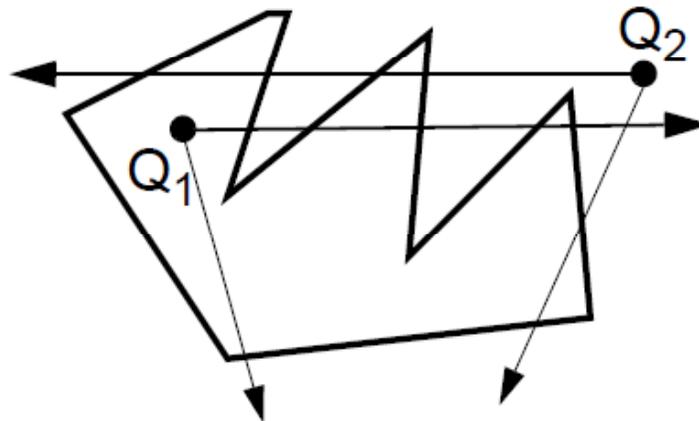
Gesucht

Liegt Punkt Q im Inneren des Polygons P ?



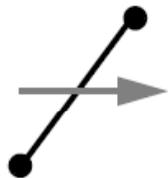
Lösung 1

- Grundlage: *Jordansches Kurven-Theorem*
Jedes Polygon zerteilt den Raum in ein Inneres und Äußeres.
- Idee:
Schicke einen Strahl S (der Einfachheit halber parallel zur x -Achse) vom Punkt Q und zähle, wie oft er die Kanten des Polygons schneidet:
 - Anzahl ungerade: Q liegt im Inneren
 - Anzahl gerade: Q liegt im Äußeren
- Beispiel:

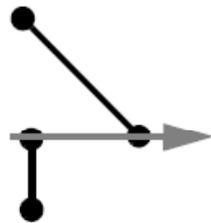


Algorithmus

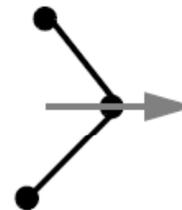
- Für jede der n Kanten des Polygons P :
Berechne den Schnitt der Kante mit dem Strahl S . Falls Schnittpunkt vorhanden, inkrementiere Zähler.
- Laufzeitkomplexität:
Schnitt zweier Strecken ist $O(1)$, $O(n)$ Aufrufe davon $\rightarrow O(n)$
- Fallunterscheidung (siehe Übung)



1 Schnitt



1, 2 oder 3 Schnitte?



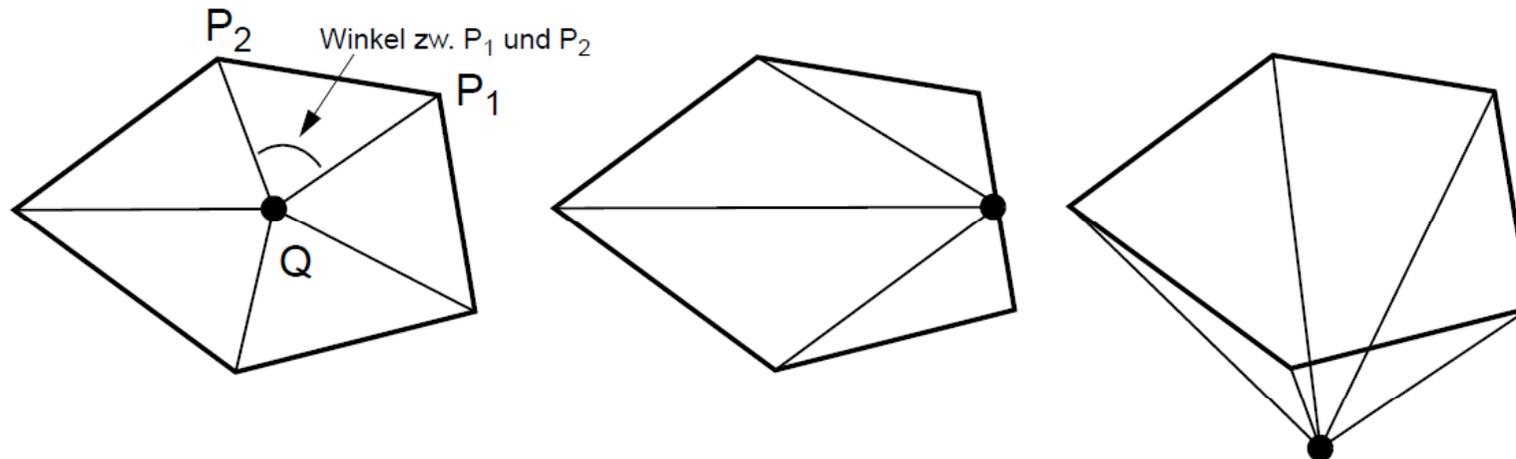
1 oder 2 Schnitte?



wieviel Schnitte?

Lösung 2

- Die zu einem Polygon R und Punkt Q gehörenden Sektorenstrahlen sind durch die Kanten von Q nach P_i gegeben.
- Berechne $\Theta(R,Q)$, die Summe aller Winkel zwischen benachbarten Sektorenstrahlen.
- Es gilt:
 - $\Theta(R,Q) = 2\pi$, so liegt Q im Inneren von R
 - $\Theta(R,Q) = \pi$, so liegt Q auf dem Rand von R
 - $\Theta(R,Q) = 0$, so liegt Q im Äußeren von R

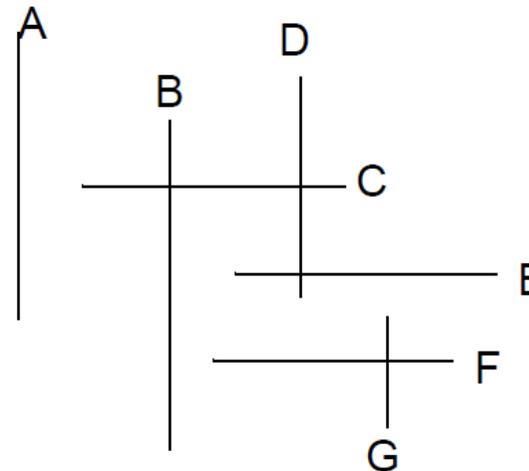


Gegeben

Menge von horizontalen und vertikalen (*orthogonalen*) Strecken

Gesucht

Alle Paare sich schneidender
Strecken



Lösung:
(B,C)
(C,D)
(D,E)
(F,G)

Annahme

- Die Endpunkte verschiedener Strecken besitzen jeweils unterschiedliche x- und y-Koordinaten
- damit sind Schnitte nur zwischen horizontalen und vertikalen Strecken möglich

Naiver Algorithmus

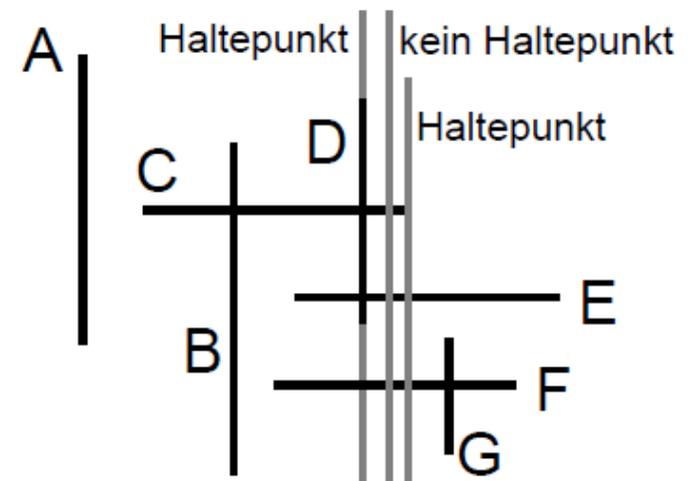
- benötigt $O(n^2)$ Vergleiche
- da jede Strecke mit allen anderen Strecken verglichen wird

Bessere Algorithmen

- Vorstellung von zwei Lösungen, die auf den Paradigmen
 - Plane-Sweep
 - Divide-and-Conquerbasieren
- Beide Algorithmen besitzen eine Laufzeit von $O(n \log n + k)$
- k ist die Zahl der Antworten

Idee

- Schiebe eine vertikale Gerade (*Sweep Line*), von links nach rechts durch den 2-dim. Datenraum
- Halte dabei nur an "interessanten" Stellen (*Event Points*)
- Beobachte dann alle Objekte, die die Sweep Line schneiden

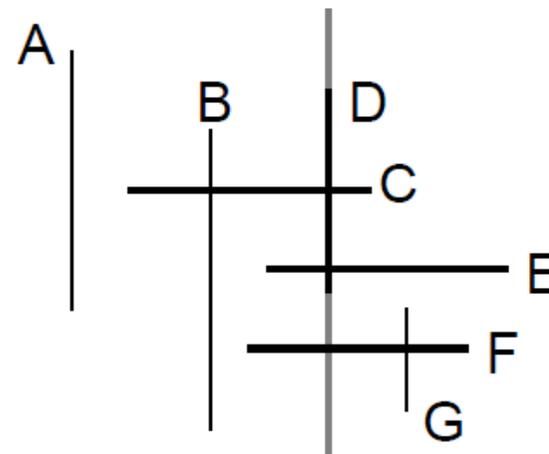


Datenstrukturen

- In dem *Event Point Schedule* werden alle Haltepunkte der Sweep Line in x-Richtung sortiert organisiert.
- In dem *Sweep Line Status* werden die aktuell die Sweep Line schneidenden Objekte verwaltet; insbesondere muß hier das Löschen und Einfügen der Objekte effizient gelöst sein

Beobachtungen für Schnitt orthogonaler Strecken

- Horizontale Strecken schneiden die Sweep Line in einer festen y-Koordinate
- Vertikale Strecken schneiden die Sweep Line in einem y-Intervall. Horizontale
- Strecken, die diese vertikale Strecke schneiden, erfüllen folgende Eigenschaften:
 - Sie schneiden auch die Sweepline
 - Ihre y-Koordinate liegt im y-Intervall



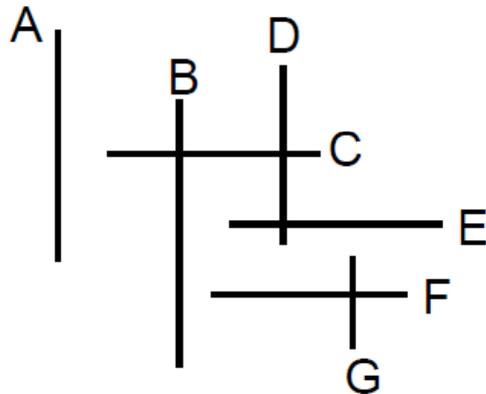
Datenstrukturen

- *Event Point Schedule*: enthält die x-Koord. jeder vertikalen Strecke und die min. und max. x-Koord. jeder horizontalen Strecke (sortiert)
- *Sweep Line Status*: enthält alle horizontalen Strecken, die die Sweep Line momentan schneiden (sortiert)

Algorithmus

```
FOR each s.x IN Event-Point-Schedule WITH ASCENDING ORDER OF x DO
  IF s is horizontal segment THEN
    IF x is minimum point of segment s THEN
      insert s into Sweep-Line-Status
    ELSIF x is maximum point of segment s THEN
      remove s from Sweep-Line-Status
  ELSIF s is vertical segment THEN
    intersections := Sweep-Line-Status.range-query (s.y1 ≤ t.y ≤ s.y2);
    FOR each t IN intersections DO
      report "s and t intersect";
    END FOR each t IN intersections;
  END FOR each s.x IN Event-Point-Schedule;
```

Vorgehen am Beispiel

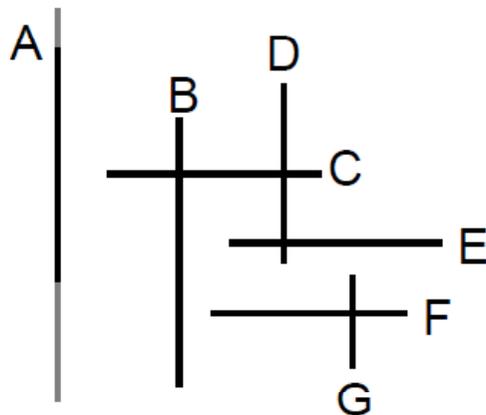


Event Point Schedule mit allen Haltepunkten:

A.x, C.x1, B.x, F.x1, E.x1,
D.x, C.x2, G.x, F.x2, E.x2

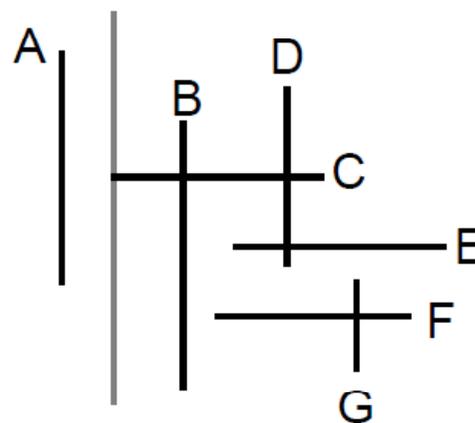
Sweep Line Status:

Stat = {}



Haltepunkt: A.x

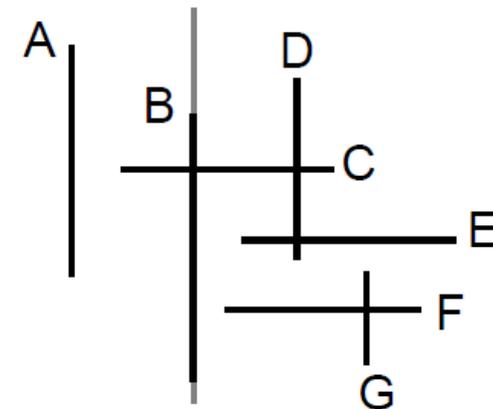
Stat = {}



Haltepunkt: C.x1

Aktion: Füge C in Stat ein

Stat = {C}.



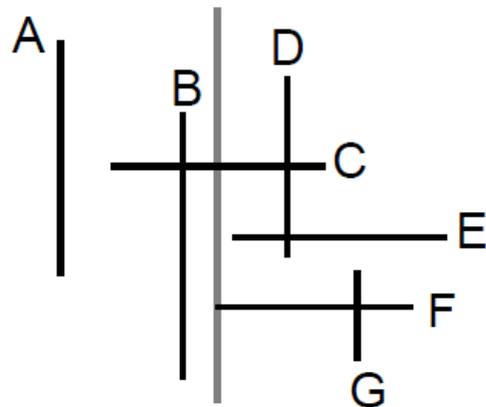
Haltepunkt: B.x

Aktion: Finde alle $l \in \text{Stat}$
mit $B.y1 \leq l.y \leq B.y2$

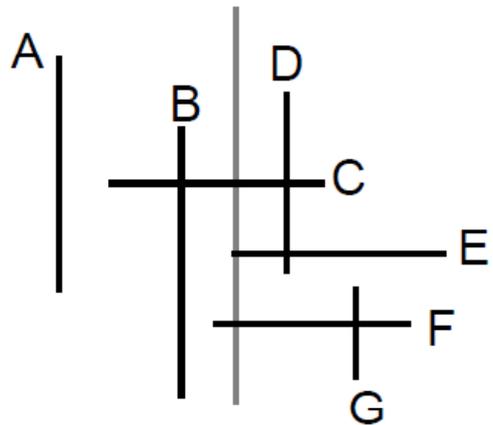
Stat = {C} $\Rightarrow l = C$

Antwort: (B,C)

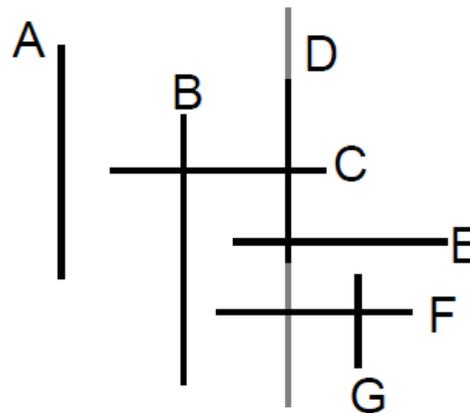
Vorgehen am Beispiel (Forts.)



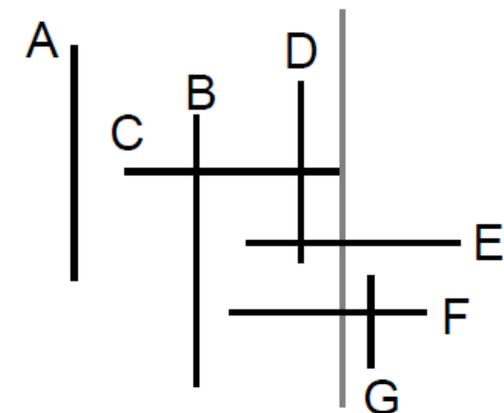
Haltepunkt: F.x1
 Aktion: Füge F in Stat ein
 Stat = {C, F}.



Haltepunkt: E.x1
 Aktion: Füge E in Stat ein
 Stat = {C, E, F} ("sortiert!")



Haltepunkt: D.x
 Aktion: Finde alle $I \in \text{Stat}$
 mit $D.y1 \leq I.y \leq D.y2$
 Stat = {C, E, F} $\Rightarrow I \in \{C, E\}$
 Antworten: (D, C), (D, E)



Haltepunkt: C.x2
 Aktion: Lösche C aus Stat
 Stat = {E, F}.

Komplexitätsberechnung

- Zum Abspeichern des Sweep Line Status wird ein höhenbalancierter Baum (z.B. ein 2-3+-Baum) verwendet, wobei die Blätter bzgl. der Sortierung miteinander verkettet sind
 - wichtige Eigenschaften (bei n gespeicherten Strecken):
 - Einfügen und Löschen benötigt $O(\log n)$ Zeit
 - Bereichsanfrage (mit r Antworten) benötigt $O(\log n + r)$ Zeit
 - Laufzeitkomplexität des Plane-Sweep-Algorithmus
Aufbau des Event Point Schedule: $O(n \log n)$
Durchlauf der Sweep Line:
 - Einfügen in Sweep Line Status: $O(n \log n)$
 - Löschen aus Sweep Line Status: $O(n \log n)$
 - Bereichsanfragen: $O(n \log n + k)$
- ⇒ Gesamtkosten: $O(n \log n + k)$

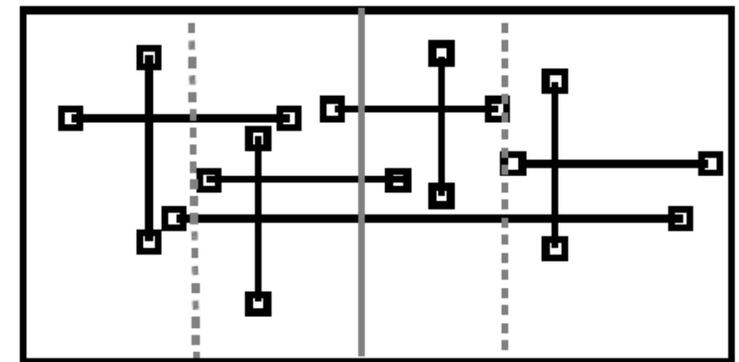
Idee

- Teile die Menge der Objekte in zwei Teilmengen (*Divide*)
- Löse das Problem für die Teilmengen (*Conquer*)
- Verschmelze die Teil-Lösungen zu einer Gesamtlösung (*Merge*)

Anwendung auf Schnittproblem orthogonaler Strecken

- Divide:
 - Betrachte die Menge S aller x -Koordinaten von vertikalen Strecken und aller Endpunkte horizontaler Strecken
 - Teile S in zwei etwa gleichgroße Mengen S_1 und S_2 auf, so daß für alle $x_1 \in S_1$ und $x_2 \in S_2$ gilt: $x_1 < x_2$
- Conquer:

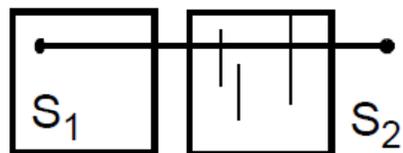
Löse das Problem für die Mengen S_1 und S_2



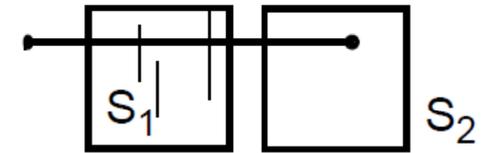
Merge beim Schnittpunktproblem orthogonaler Strecken

Beim Merge werden Schnittpunkte nur für folgende Fälle berechnet:

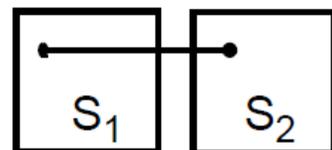
1. Der linke Endpunkt einer horizontalen Strecke liegt in S_1 , und der rechte Endpunkt liegt rechts von S_2 .
2. Der rechte Endpunkt einer horizontalen Strecke liegt in S_2 , und der linke Endpunkt liegt links von S_1 .



Strecke schneidet alle vertikalen Strecken in S_2 bzw. S_1 , deren y -Intervall die y -Koordinate überdeckt



Insbesondere sind damit alle Schnitte für den Fall, in dem der linke Eckpunkt einer Strecke in S_1 und der rechte Endpunkt in S_2 liegt, immer schon vorher berechnet worden.

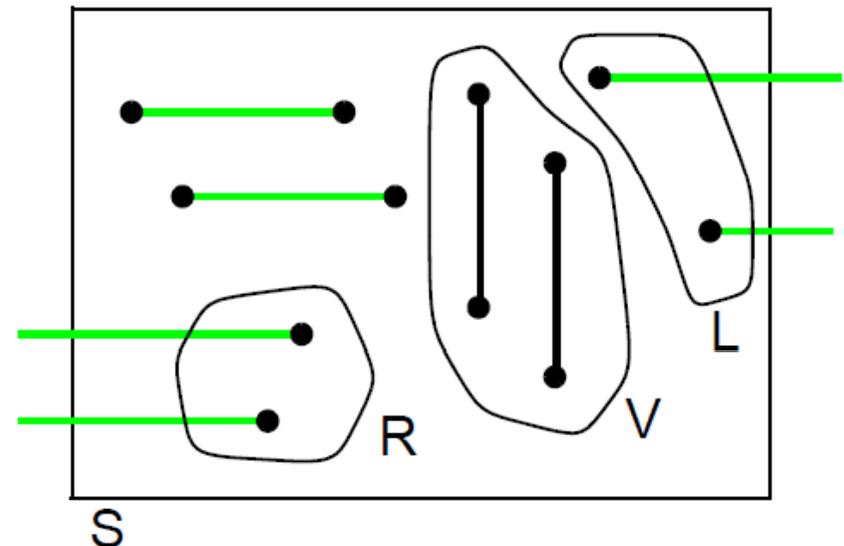


Alle Schnitte mit Strecken in S_1 bzw. S_2 sind schon berechnet.

Definition: $Y \star V := \{ (v.x, y) \mid v \in V, y \in Y, v.y1 \leq y \leq v.y2 \}$

Datenstrukturen

- S ist ein nach den x-Koordinaten sortiertes Array von horizontalen Eckpunkten bzw. vertikalen Strecken
- L ist eine nach y-Koordinaten sortierte Liste aller linken Endpunkte in S, deren rechter Endpunkt nicht in S liegt
- R ist eine nach y-Koordinaten sortierte Liste aller rechten Endpunkte in S, deren linker Endpunkt nicht in S liegt
- V ist eine nach y-Koordinaten des unteren Endpunkts sortierte Liste aller vertikalen Strecken in S



Algorithmus StreckenSchnitt ($_{IN} S, _{OUT} L, _{OUT} R, _{OUT} V$)

```

IF |S| = 1 THEN
  L := ∅; R := ∅; V := ∅;
  IF S[1] linker Eckpunkt THEN L := {s}; (* s ∈ S *)
  IF S[1] rechter Eckpunkt THEN R := {s};
  IF S[1] vertikale Strecke THEN V := {s};

```

ELSE

Teile S in zwei gleich große Mengen S_1 und S_2 auf, so daß
für alle $x_1 \in S_1$ und $x_2 \in S_2$ gilt: $x_1 < x_2$;

```

StreckenSchnitt (S1, L1, R1, V1);
StreckenSchnitt (S2, L2, R2, V2);

```

$h := L_1 \cap R_2$;

Gebe $(L_1 \setminus h) \star V_2$ aus; (* Fall 1 *)

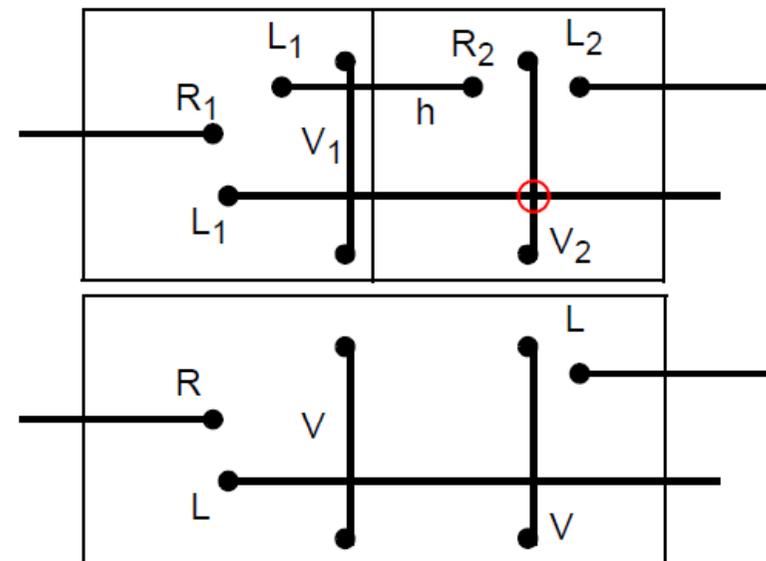
Gebe $(R_2 \setminus h) \star V_1$ aus; (* Fall 2 *)

$L := (L_1 \setminus h) \cup L_2$;

$R := R_1 \cup (R_2 \setminus h)$;

$V := V_1 \cup V_2$;

// $Y \star V := \{ (v.x, y) \mid v \in V, y \in Y, v.y1 \leq y \leq v.y2 \}$



Komplexitätsanalyse

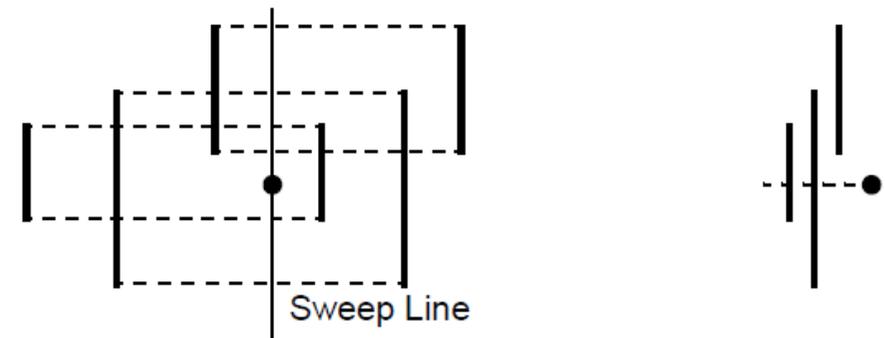
- Sortierung von S : $O(n \log n)$
- Divide (ein Schritt): $O(1)$
- Merge:
 - Die Mengenoperationen (\cap , \cup) auf L , R und V (ein Schritt) können in $O(n)$ bearbeitet werden
 - Die Operation $M \star V$ kann in $O(|M| + |V| + |M \star V|)$ durchgeführt werden (d.h. lineare Laufzeit + Anzahl der gefundenen Paare)
 - Anzahl der Rekursionen: $O(\log n)$
- Gesamtaufwand: $O(n \log n + k)$

Gegeben Menge P von Punkten; Menge R von Rechtecken.

Gesucht Alle Paare (p,r) mit $p \in P, r \in R$, wobei p in r liegt

Plane-Sweep-Lösung

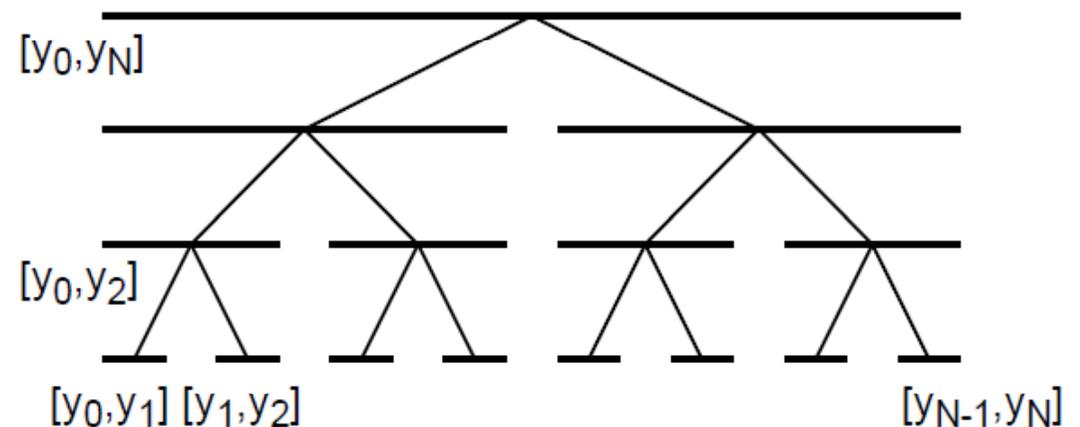
- Betrachte nur die vertikalen Kanten der Rechtecke
- Menge der Haltepunkte (Event Point Schedule) setzt sich zusammen aus allen Punkten p und den x -Koordinaten der vertikalen Kanten (nach x sortiert)
- "Linke" Kanten werden in den Sweep Line Status eingefügt
- "Rechte" Kanten werden aus dem Sweep Line Status entfernt
- Für einen Punkt p des Event Point Schedule müssen alle Kanten im Sweep Line Status bestimmt werden, deren y -Intervall die y -Koordinate von p enthält



Definition

- Datenstruktur zur effizienten Implementierung des Sweep Line Status beim Punkteinschlußproblem
- Sei y_0, \dots, y_N eine Menge von Punkten im 1-dimensionalen Datenraum mit $y_{i-1} < y_i$ für $1 \leq i \leq N$. Der *Segmentbaum* für diese Menge ist ein binärer Baum mit minimaler Höhe, dessen Knoten folgende Segmente zugeordnet sind:

- jedem Blattknoten ist ein Segment $[y_{i-1}, y_i]$ zugeordnet
- jedem inneren Knoten ist die Vereinigung der Segmente seines Teilbaums zugeordnet



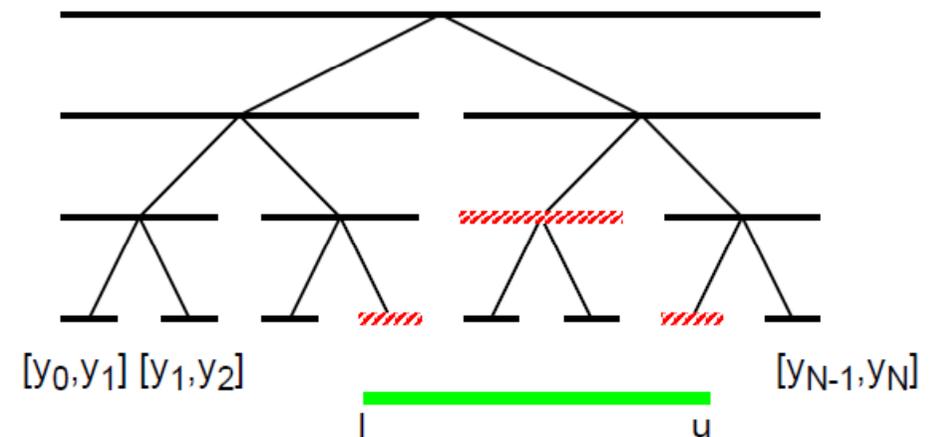
- Jeder Knoten besitzt zusätzlich eine Liste für abzuspeichernde Intervalle

Einfügen eines Intervalls

- Ein Intervall $i = [l, u]$ wird in der Liste eines Knotens abgelegt, falls i das zugehörige Segment des Knotens überdeckt, jedoch das Segment des Vaterknotens **nicht** überdeckt

Punktanfrage

- Finde zu einem gegebenen Punkt $p \in [y_0, y_N]$ alle Intervalle i , die p überdecken.
- Bestimme den Pfad von der Wurzel zu dem Blatt, so daß das zugeordnete Segment des Knotens stets p enthält. Die Antwortmenge der Anfrage ist die Vereinigung der Intervallisten aller Knoten dieses Pfades.



Komplexitätsanalyse

- Aufbau des Segmentbaums mit leeren Intervall-Listen:
 - $O(N)$ Zeit und $O(N)$ Speicherplatz
- Einfügen eines Intervalls in den Baum:
 - Maximal zwei Knoten auf jeder Stufe des Baums sind durch das Einfügen betroffen
 - Einfügen in eine (unsortierte) Intervallliste benötigt $O(1)$ Zeit
⇒ $O(\log N)$ Zeit
- Löschen aus dem Baum:
 - analog zu Einfügen, d.h. $O(\log N)$ Zeit
- Punktanfrage:
 - $O(\log N + r)$ Zeit, wenn r die Größe der Antwortmenge ist

Komplexitätsanalyse

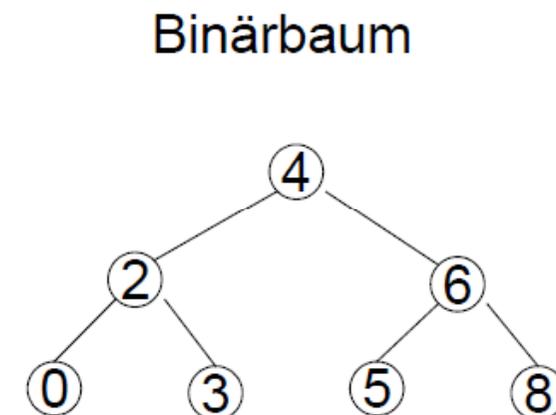
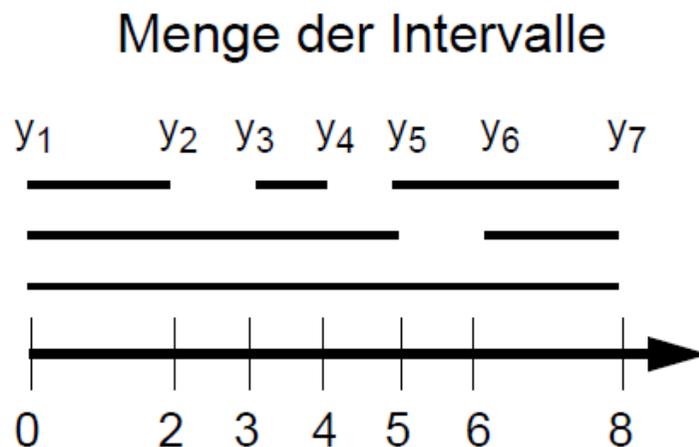
- Bezeichner
 - n_r = Anzahl der Rechtecke, n_p = Anzahl der Punkte, $n = n_r + n_p$
 - k = Anzahl der gefundenen Paare (Punkt, Rechteck)
- Sortierung der Haltepunkte (pro Rechteck 2, pro Punkt 1):
 - $O(n \log n)$ Zeit
- Aufbau des leeren Segmentbaums: Berechne die Segmentstruktur aus den y -Koordinaten der Rechtecke, sortiere diese Koordinaten und erzeuge den leeren Segmentbaum:
 - $O(n_r \log n_r) = O(n \log n)$ Zeit
- Einfügen und Löschen im Segmentbaum: $O(n_r \log n_r)$ Zeit
- Punktanfragen: $O(n_p \log n_r + k)$ Zeit
- Gesamtkosten: $O(n \log n + k)$ Zeit und $O(n + n_r \log n_r)$ Speicherplatz
⇒ *Nachteil*: hoher Speicherplatzaufwand

Motivation

- Verwendung anstelle des Segmentbaums beim Punkteinschlußproblem
- Unterschied zum Segmentbaum: Knoten des Baums repräsentieren nicht ein Segment, sondern einen Punkt
- Vorteil: Speicherplatzbedarf $O(n)$

Aufbau eines Binärbaums

- Sei I_1, I_2, \dots, I_n eine Menge von Intervallen mit $I_i = [u_i, o_i]$, $1 \leq i \leq n$.
- Sei $P = \{ y_1, \dots, y_s \}$ die Menge der Punkte, die Eckpunkt von zumindest einem Intervall sind, $s \leq 2n$. Sortiere P , so daß $y_i < y_{i+1}$ gilt.
- Erzeuge einen binären Suchbaum mit minimaler Höhe für die Punkte y_1, \dots, y_s



Einfügen eines Intervalls

- Jeder Knoten *Node* besitzt einen *Punkt* $Node.y$; jedem Knoten wird eine *Menge von Intervallen* I_1, \dots, I_m zugeordnet, die den Punkt $Node.y$ enthalten.
- Es werden zwei sortierte Listen über der Menge I_1, \dots, I_m geführt:
 - u-Liste: alle Intervalle sind nach den u-Werten aufsteigend sortiert
 - o-Liste: alle Intervalle sind nach den o-Werten absteigend sortiert
- Ein Intervall I wird in die beiden Listen des ersten Knotens K eingetragen, dessen Punkt $K.y$ in I enthalten ist (Durchlauf von der Wurzel beginnend):

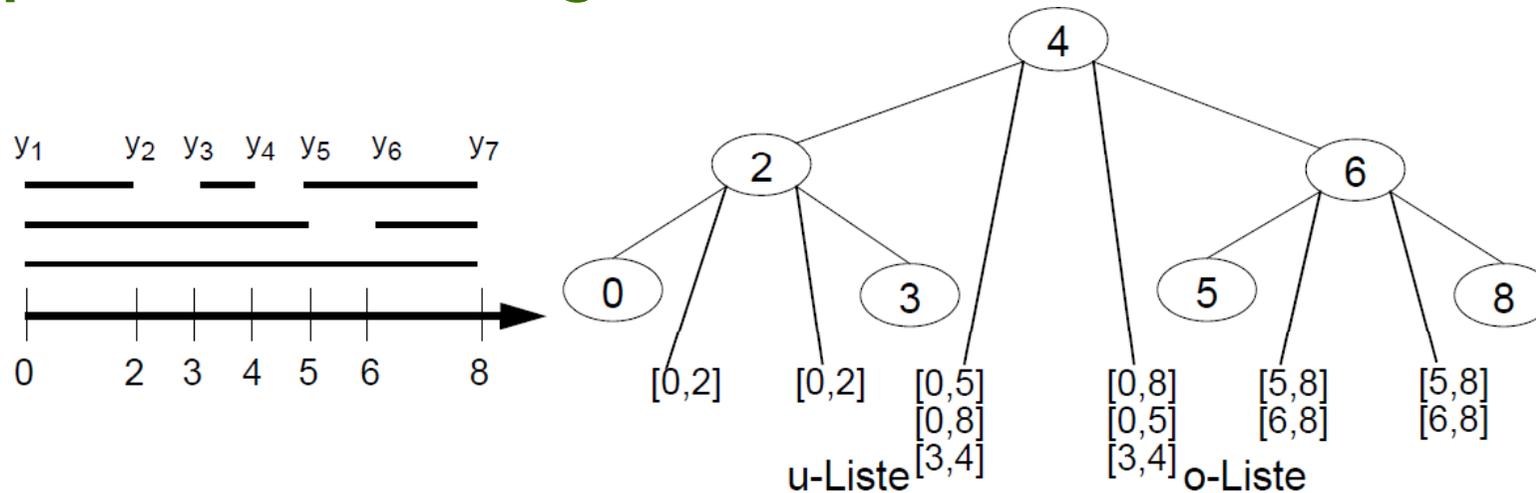
Einfügen eines Intervalls (cont.)

Algorithmus Insert (I, Node)

(erster Aufruf mit Node = Wurzel)

```
IF  $I.u \leq \text{Node}.y \leq I.o$  THEN
    InsertIntoList (u_list, I.u);
    InsertIntoList (o_list, I.o);
ELSIF  $I.o < \text{Node}.y$  THEN
    Insert (I, Node.left)
ELSE
    Insert (I, Node.right)
```

Beispiel für das Einfügen



Komplexitätsanalyse

- Verwende zur Organisation der Listen balancierter Bäume (z.B. 2-3+-Baum) \Rightarrow Einfügen in die o- und u-Liste benötigt $O(\log n)$ Zeit
 - Erreichen des Knotens im Intervallbaum: $O(\log n)$ Zeit
 - Gesamtaufwand für eine Einfügung: $O(\log n)$ Zeit
(bei $O(1)$ Speicherplatz)
- \Rightarrow Speicherplatzaufwand für n Intervalle: $O(n)$

Punktanfrage

- Gegeben: Anfragepunkt y
- Gesucht: alle Intervalle I , die y enthalten

Algorithmus PointQuery (Node, y)

IF $y = \text{Node.y}$ THEN

 Gebe alle Intervalle der u -Liste aus;

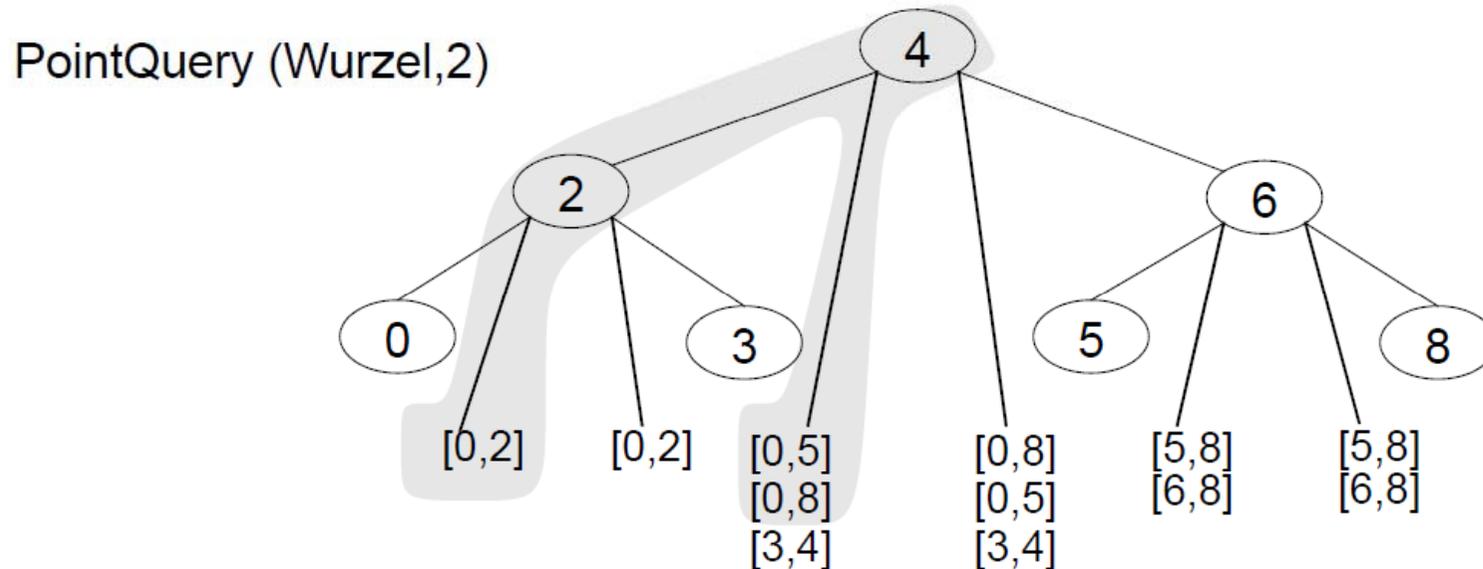
ELSIF $y < \text{Node.y}$ THEN

 Gebe sequentiell den Anfang der u -Liste aus, bis ein u -Wert rechts von y liegt;
 PointQuery (Node.left, y);

ELSE

 Gebe sequentiell den Anfang der o -Liste aus, bis ein o -Wert links von y liegt;
 PointQuery (Node.right, y);

Beispiel für die Punktanfrage



Komplexitätsanalyse der Punktanfrage

- Für jeden Knoten des Intervallbaums wird maximal auf ein Intervall zugegriffen, das nicht Antwort ist
- Die Anfrage ist auf einen Pfad des Baums beschränkt
 ⇒ Gesamtaufwand: $O(\log n + k)$ (k = Größe der Antwortmenge)