Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Lehr- und Forschungseinheit für Datenbanksysteme
Prof. Dr. Christian Böhm
Dr. Thomas Bernecker, Sebastian Goebl

München, 17.04.2013

Algorithmen und Datenstrukturen

SS 2013

Übungsblatt 1: Mathematische Grundlagen

Besprechung: 25. - 30.04.2013

Abgabe dieses Übungsblattes bis spätestens Donnerstag, 25.04.2013, 8:00 Uhr, keine Bewertung.

Hinweise zur Abgabe:
Geben Sie bitte Ihre gesammelten Lösungen zu diesem Übungsblatt in einer Datei `loesung01.zip` unter `https://uniworx.ifi.lmu.de` ab.

Aufgabe 1-1 *Vollständige Induktion* **0 Punkte**

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

(a) $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

(b) $n^5 - n$ ist immer durch 5 teilbar.

Aufgabe 1-2 *Allgemeine Induktion* **0 Punkte**

Das Zusammenspiel zwischen induktiver Mengendefinition und induktivem Beweisprinzip lässt sich nicht nur auf $\mathbb{N}$ anwenden, sondern auch auf andere Mengen übertragen. Die induktive Definition einer Menge M besteht im allgemeinen aus

(i) der expliziten Angabe gewisser Elemente von M,

(ii) Regeln zur "Erzeugung" weiterer Elemente $y \in M$ aus schon vorhandenen $x_1, x_2, ..., x_k \in M$

zusammen mit der (oft nicht mehr explizit angegebenen) Feststellung, dass M nur Elemente gemäß i) und ii) enthält (und sonst keine weiteren).

Analog zur Situation bei $\mathbb{N}$ erhält man auch im allgemeinen Fall ein Induktionsprinzip für Beweise der Gültigkeit von Aussagen $p(x)$ für alle $x \in M$: Falls

(i) $p(x)$ für alle explizit angegebenen $x \in M$,

(ii) für beliebige $x_1, ..., x_k \in M$ und daraus gemäß den Definitionsregeln erzeugbares $y \in M$ gilt:
Falls $p(x_1), ..., p(x_k)$, so $p(y)$,

dann: $p(x)$ für alle $x \in M$.

Betrachten Sie die Menge $N \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, die wie folgt *induktiv* definiert ist:

(i) $(0,0) \in N$, $(1,1) \in N$.

(ii) Ist $(m,n) \in N$ dann ist $(m+2,n) \in N$ und $(m,n+2) \in N$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $(x,y) \in N$ gilt: $x+y$ ist gerade.

Aufgabe 1-3 *Weitere in Vorlesung und/oder Übung verwendete mathematische Begriffe* **0 Punkte**

Vergewissern Sie sich, ob Sie Kenntnis von den nachfolgend aufgeführten grundlegenden Begriffen haben und informieren Sie sich gegebenenfalls selbstständig! Erklären Sie zur Überprüfung Ihres Wissens für jeden Begriff kurz, was er bedeutet. Geben Sie außerdem jeweils ein Beispiel an, das das entsprechende mathematische Konstrukt korrekt verwendet.

(a) Grenzwert (Limes) einer Funktion

(b) Konvergenz einer Funktion

(c) Logarithmus

(d) Modulo ($x \bmod y$)

(e) Fakultät ($x!$)

(f) Permutation

(g) Partielle Ordnung

(h) Totale Ordnung