Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Peer Kröger
Michael Fromm, Florian Richter

München, 25.10.2018

Einführung in die Programmierung

WS 2018/19

Übungsblatt 1: Mengen, Boolesche Algebra

Besprechung: 29.10.2018 - 02.11.2018

Hinweise zur Abgabe:
Sammeln Sie die Lösungen zu diesem Übungsblatt (also `mengen1.txt`, `mengen2.txt` und `relationen.txt`) in einem `zip`-Archiv `loesung01.zip`. Dieses `zip`-Archiv können Sie schließlich unter `https://uniworx.ifi.lmu.de/` abgeben.

Wichtig: Achten Sie bitte darauf, dass Ihre Lösungsdateien die korrekten, d. h. die in der Angabe geforderten Namen haben, sonst kann Ihre Lösung nicht der richtigen Aufgabe zugeordnet werden. Java-Dateien, die nicht fehlerfrei kompilierbar sind, werden im Allgemeinen nicht korrigiert.

Aufgabe 1-1 *Mengenlehre*

In der Vorlesung haben Sie das Mengenkonzept kennengelernt. Beantworten Sie folgende Fragen zu mathematischen Mengen:

(a) Geben Sie die Menge aller Zweierpotenzen zwischen 2 und 100 sowohl in *extensionaler* als auch in *intensionaler* Darstellung an.

> **Lösungsvorschlag:**
> Extensional: $M_e = \{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$; Intensional: $M_i = \{2^x | x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq 2^x \leq 100\}$

(b) Ist eine extensionale Aufzählung der Elemente der folgenden intensional definierten Menge möglich? Wenn Ja, geben Sie diese an. Wenn nein, begründen Sie, warum.

$$M_i = \{5^x | x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq 5^x \leq 100\}$$

> **Lösungsvorschlag:**
> Ja, $M_i = \{1, 5, 25\}$

(c) Für welche der folgenden Mengen gilt Äquivalenz, d.h. $M_i = M_j$?

- $M_1 = \{1, 7, 9, 15, 16\}$
- $M_2 = \{1, 7, 16, 15, 7\}$
- $M_3 = \{1, 7, 9, 15, 16, 7\}$
- $M_4 = \{16, 7, 15, 9, 1\}$

> **Lösungsvorschlag:**
> Es gilt $M_1 = M_3 = M_4$

(d) Berechnen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ für $A = \{1, 6, 17, 63, 82\}$ und $B = \{3, 6, 17, 62, 82\}$

Lösungsvorschlag:

$A \cup B = \{1, 3, 6, 17, 62, 63, 82\}$
$A \cap B = \{6, 17, 82\}$
$A \setminus B = A - B = \{1, 63\}$

(e) Bestimmen Sie die extensionale Darstellung von:

(i) $M_1 = \{n \in \mathbb{Z} || n^3| \leq |n^2|\}$

(ii) $M_2 = \{X | X \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \wedge |X| = 3\}$

(iii) $M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

Lösungsvorschlag:

$M_1 = \{-1, 0, 1\}$
$M_2 = \{\{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$
$M_3 = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$

(f) Bestimmen Sie die intensionale Darstellung von:

(i) $M_4 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(ii) $M_5 = \{1, 3, 9, 27, 81\}$

(iii) $M_6 = \{1, 2, \frac{1}{2}\}$

Lösungsvorschlag:

$M_4 = \{2 * k + 1 | 0 \leq k \leq 4 \wedge k \in \mathbb{N}_0\}$
$M_5 = \{3^x | 0 \leq x \leq 4 \wedge x \in \mathbb{N}_0\}$
$M_6 = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | a + b \leq 3 \wedge a, b \in \mathbb{N}\} = \{2^x | -1 \leq x \leq 1 \wedge x \in \mathbb{Z}\}$

Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe in einer Datei `mengen1.txt` ab.

Aufgabe 1-2 *Operationen auf Mengen*

Betrachten wir die Mengen $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{A, B, C, D\}$ und $M_3 = \{1, 2\}$.
Geben Sie die Elemente der Lösungsmengen zu den folgenden Definitionen extensional an, d.h. zählen Sie die jeweiligen Elemente explizit auf.

- Das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times M_3$

Lösungsvorschlag:

$L_1 = \{(a, A, 1), (a, A, 2), (a, B, 1), (a, B, 2), (a, C, 1), (a, C, 2), (a, D, 1), (a, D, 2)\}$

- Die Potenzmenge $\wp(M_3)$

Lösungsvorschlag:

$L_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

- Eine 2-stellige Relation zwischen M_1 und M_2, die eine Funktion ist.
  (Eine mögliche Lösungsmenge genügt)

Lösungsvorschlag:
$L_3 = \{(a, A)\}$ oder $L_3 = \{(a, B)\}$ oder $L_3 = \{(a, C)\}$ oder $L_3 = \{(a, D)\}$ oder $L_3 = \{\}$

- Eine 2-stellige Relation zwischen M_3 und M_2, die *keine* Funktion ist.
  (Eine mögliche Lösungsmenge genügt)

Lösungsvorschlag:
$L_4 = \{(1, A), (1, B)\}$

- Eine totale Funktion von M_2 nach M_3.
  (Eine mögliche Lösungsmenge genügt)

Lösungsvorschlag:
$L_4 = \{(A, 1), (B, 2), (C, 2), (D, 1)\}$

Geben Sie die Lösung zu dieser Aufgabe in einer Datei `mengen2.txt` ab.

Aufgabe 1-3 *Relationen*

Im folgenden seien $M, N \subseteq \mathbb{N}$ beliebige Mengen von natürlichen Zahlen. Die in Kapitel 3.1 eingeführten Beziehungen zwischen Mengen lassen sich auch als Relationen auffassen.

Bezeichnung	Notation	Bedeutung
M ist Teilmenge von N	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
M ist echte Teilmenge von N	$M \subset N$	es gilt $M \subseteq N$ und $M \neq N$
M und N sind disjunkt	$M \cap N = \emptyset$	M und N haben keine gemeinsamen Elemente
M und N sind identisch	$M \equiv N$	es gilt $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$

(a) Geben Sie jeweils die Wertebereiche dieser Relationen an!

Verwenden Sie für diese Aufgabe die Datei `relationen.txt`, in der Sie Ihre Antworten eintragen können.

Lösungsvorschlag:
Die Definition setzt voraus:

1. Die Relation ist zweistellig.
2. Der Wertebereich ist die Potenzmenge über einem Kreuzprodukt einer Menge *mit sich selbst*.

Damit können wir notieren:

- $" \subseteq " \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $" \subset " \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- "disjunkt" $\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $" \equiv " \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(b) Welche dieser Relationen sind

- reflexiv?
- symmetrisch?
- antisymmetrisch?
- transitiv?
- alternativ?

Ergänzen Sie Ihre Lösung in der Datei `relationen.txt` entsprechend.

Lösungsvorschlag:

Zur Erinnerung: Eine zweistellige Relation $R \in \mathcal{P}(M \times M)$ ist

- reflexiv, wenn für alle $x \in M$ gilt: xRx.
- symmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy \Rightarrow yRx$.
- antisymmetrisch, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.
- transitiv, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
- alternativ, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy \vee yRx$.

	reflexiv	symmetrisch	antisymmetrisch	transitiv	alternativ
$\subseteq$	$\times$		$\times$	$\times$	
$\subset$			$\times$ *	$\times$	
disjunkt		$\times$			
$\equiv$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Zu *: Aus was Falschem folgt alles: $xRy \wedge yRx = \{\} \Rightarrow x = y$