Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
PD. Dr. Peer Kröger
Dr. Andreas Züfle, Daniel Kaltenthaler, Klaus Schmid

München, 28.10.2014

Einführung in die Programmierung

WS 2014/15

Übungsblatt 3: Binärbäume, p-adische Zahlendarstellung,

Besprechung: 05./07./10.11.2014

Ende der Abgabefrist: Dienstag, 04.11.2014 14:00 Uhr.

Hinweise zur Abgabe:
Geben Sie bitte Ihre gesammelten Lösungen zu diesem Übungsblatt in einer Datei `loesung03.zip` unter `https://uniworx.ifi.lmu.de` ab.

Aufgabe 3-1 *Binärbäume* **0 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es eine Funktion

$$linearize : binarytree_M \rightarrow M^*$$

zu entwickeln, die einen gegebenen Binärbaum $b \in binarytree_M$ linearisiert, d.h. aus den in den Knoten enthaltenen Werten $m_i \in M$ eine Folge $f \in M^*$ erzeugt. Die Funktion bildet also Binärbäume auf Folgen ab. Beispielsweise sei der Baum $b_1 = (A, (C, (B, \epsilon, \epsilon), (C, \epsilon, \epsilon)), (A, \epsilon, \epsilon))$ gegeben:

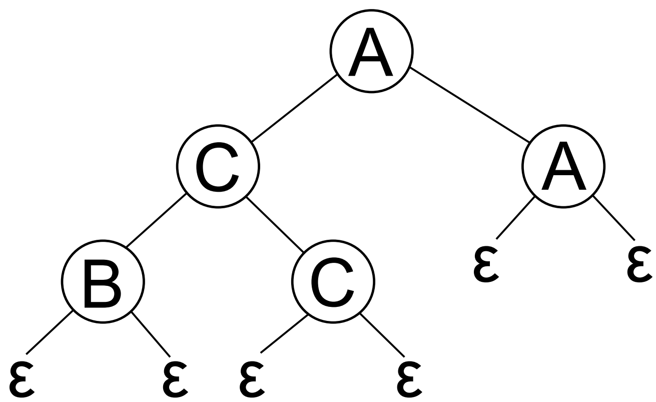

Abbildung 1: Ein beispielhafter Binärbaum $b_1 \in binarytree_M$ mit $M = \{A, B, C\}$

Der Einfachheit halber sei die Reihenfolge der Sortierung der Knotenwerte in der Ergebnisfolge beliebig. Entsprechend ist, abhängig von Ihrer Funktionsdefinition, z.B. (A, C, A, B, C) eine mögliche Ausgabe von $linearize(b_1)$, aber es ist auch eine Funktionsdefinition korrekt, die (A, A, C, C, B) als Ergebnis zurückgibt.

Definieren Sie eine Funktion $linearize : binarytree_M \rightarrow M^*$, die diese Aufgabe erfüllt. Die in der Vorlesung definierten Hilfsfunktionen für Binärbäume sowie Folgen dürfen zur Lösung des Problems verwendet werden.

Geben Sie außerdem die Folge an, auf die Ihre Funktion den Beispielbinärbaum b_1 abbildet.

Geben Sie Ihre Lösung in einer Datei `binaerbaum.txt` bzw. `binaerbaum.pdf` ab.

Aufgabe 3-2 *Boolesche Algebra* **5 Punkte**

In der Vorlesung wurde die Menge der booleschen Werte $\mathbb{B}$={$TRUE$,$FALSE$} eingeführt. Funktionen auf diesem Wertebereich (boolesche Funktionen) werden häufig mit Hilfe von Wahrheitstabellen (oder Wahrheitstafeln) definiert. Unter einer Wahrheitstabelle versteht man die tabellarische Aufstellung des Wahrheitswertsverlaufs einer booleschen Funktion. Die Wahrheitstabelle zeigt für alle möglichen Zuordnungen von Wahrheitswerten, welchen Wahrheitswert die Gesamtaussage unter der jeweiligen Zuordnung annimmt.

- Die einstellige Funktion
$$\neg : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$
(gesprochen "nicht") ist definiert durch folgende Wahrheitstabelle:

x	$\neg x$
$TRUE$	$FALSE$
$FALSE$	$TRUE$

Das bedeutet: Die Funktion $\neg$ bildet den Wert $TRUE$ auf den Wert $FALSE$ und umgekehrt ab.

- Die zweistelligen Funktionen
$$\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$
(gesprochen "oder") und
$$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$
(gesprochen "und") sind definiert durch die Wahrheitstabelle:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
$FALSE$	$FALSE$	$FALSE$	$FALSE$
$FALSE$	$TRUE$	$TRUE$	$FALSE$
$TRUE$	$FALSE$	$TRUE$	$FALSE$
$TRUE$	$TRUE$	$TRUE$	$TRUE$

- Die zweistelligen Funktion
$$\Rightarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$
(gesprochen "impliziert") ist definiert durch folgende Wahrheitstabelle:

x	y	$x \Rightarrow y$
$FALSE$	$FALSE$	$TRUE$
$FALSE$	$TRUE$	$TRUE$
$TRUE$	$FALSE$	$FALSE$
$TRUE$	$TRUE$	$TRUE$

Gegeben sei nun folgende dreistellige Funkion:

$$f : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$$

$$f(x, y, z) = ((x \vee (\neg y)) \Rightarrow (y \wedge z))$$

Klammern bezeichnen einen Vorrang, d.h., um den Wert von f zu bestimmen, ist zunächst der Wert von $(\neg y)$ bzw. $(y \wedge z)$ zu bestimmen. Geben Sie die Wahrheitstabelle der dreistelligen booleschen Funktion f an. Vervollständigen Sie hierfür die Datei `boole.txt`, und geben Sie diese Datei als Lösung ab.

Aufgabe 3-3 *p-adische Zahlendarstellungen* **6 Punkte**

Die Datei `p-adisch.txt` enthält folgende Tabelle:

$p = 2$	$p = 8$	$p = 10$	$p = 16$
1101	15	13	D
		253	
			29E
110100011			
	61		

Ergänzen Sie die Tabelle so, dass in jeder Zeile die verschiedenen p-adischen Zahlendarstellungen für die selbe Zahl stehen.

Aufgabe 3-4 *Darstellung negativer Zahlen und Mengen von Zahlen* **0 Punkte**

In der Vorlesung haben wir die p-adische Darstellung von natürlichen Zahlen kennengelernt. Wenn man eine bestimmte Anzahl n von Stellen annimmt, lässt sich eine schematische Darstellung von ganzen Zahlen (die Sie formeller erst später kennenlernen) im Binärsystem (d.h. $p = 2$) wie folgt veranschaulichen:

$$-2^{n-1} \cdot a_{n-1} + 2^{n-2} \cdot a_{n-2} + \ldots + 2^1 \cdot a_1 + 2^0 \cdot a_0$$

wobei $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0$ eine Zeichenreihe aus dem Alphabet $\{0, 1\}$ ist. Hier wird also der erste Summand negiert. Dadurch sind mit einer Zeichenkette der Länge n nicht die Zahlen von 0 bis p^n darstellbar, sondern die Zahlen von $-p^{n-1}$ bis $p^{n-1} - 1$. Für $n = 8$ wäre somit die kleinste darstellbare Zahl -128 mit der Binärdarstellung 10000000, die größte Zahl 127 mit der Binärdarstellung 01111111.

Betrachten wir nun folgende Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$ von Zahlen:

$$A = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Sei eine Funktion $f : A \to A$ definiert wie folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(-8) &=& 1 & \qquad & f(0) &=& 0 \\ f(-7) &=& -7 && f(1) &=& -8 \\ f(-6) &=& 5 && f(2) &=& 4 \\ f(-5) &=& -3 && f(3) &=& -4 \\ f(-4) &=& 3 && f(4) &=& 2 \\ f(-3) &=& -5 && f(5) &=& -6 \\ f(-2) &=& 7 && f(6) &=& 6 \\ f(-1) &=& -1 && f(7) &=& -2 \end{array}$$

Welcher tiefere Sinn steckt wohl hinter dieser Funktion? Erklären Sie in einer Datei `darstellung.txt` oder `darstellung.pdf` die Bedeutung der Funktion.