Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
PD. Dr. Peer Kröger
Dr. Andreas Züfle, Andreas Kaltenthaler, Klaus Schmid

München, 21.10.2014

Einführung in die Programmierung

WS 2014/15

Übungsblatt 2: Induktion

Besprechung: 29./31.10./3.11.2014

Ende der Abgabefrist: Dienstag, 28.10.2014 14:00 Uhr.

Hinweise zur Abgabe:
Geben Sie bitte Ihre gesammelten Lösungen zu diesem Übungsblatt in einer Datei `loesung02.zip` unter `https://uniworx.ifi.lmu.de` ab.

Wichtig: Achten Sie bitte darauf, dass Ihre Lösungsdateien die korrekten, d. h. die in der Angabe geforderten Namen haben, sonst kann Ihre Lösung nicht der richtigen Aufgabe zugeordnet werden. Als Dateiformate sind txt und pdf möglich.

Aufgabe 2-1 *Vollständige Induktion* **6 Punkte**

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

(a) $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

(b) $n^3 - n$ ist immer durch 6 teilbar.

Geben Sie Ihre Lösungen in einer Datei `2-1.txt` bzw. `2-1.pdf` ab.

Aufgabe 2-2 *Fehler in Beweisführung* **0 Punkte**

Der folgende Satz gilt offensichtlich nicht, also muss der Beweis des Satzes Fehler enthalten.
Finden Sie diese.

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: für jede Folge $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $x_1 = \ldots = x_n$.

Beweis: durch vollständige Induktion über n.

Induktionsbasis: $n = 1$.
Für jede Folge $(x_1) \in \mathbb{R}^1$ gilt die Behauptung trivialerweise.

Induktionsannahme: Für ein n gelte, dass für jede Folge $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt $x_1 = \ldots = x_n$.

Induktionsschritt: $n \to n + 1$

Zu zeigen: es gilt auch für $n + 1$, dass für jede Folge $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $x_1 = \ldots = x_{n+1}$.

Betrachte also eine beliebige Folge $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Dann ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_1 = \ldots = x_n$.
Ebenso ist $(x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$, und nach Induktionsannahme gilt $x_2 = \ldots = x_{n+1}$.
Also ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$.

QED

Aufgabe 2-3 *Allgemeine Induktion* **5 Punkte**

Das Zusammenspiel zwischen induktiver Mengendefinition und induktivem Beweisprinzip läßt sich nicht nur auf $\mathbb{N}$ anwenden, sondern auch auf andere Mengen übertragen. Die induktive Definition einer Menge M besteht im allgemeinen aus

(i) der expliziten Angabe gewisser Elemente von M,

(ii) Regeln zur "Erzeugung" weiterer Elemente $y \in M$ aus schon vorhandenen $x_1, x_2, ..., x_k \in M$

zusammen mit der (oft nicht mehr explizit angegebenen) Feststellung, dass M nur Elemente gemäß i) und ii) enthält (und sonst keine weiteren).

Analog zur Situation bei $\mathbb{N}$ erhält man auch im allgemeinen Fall ein Induktionsprinzip für Beweise der Gültigkeit von Aussagen $p(x)$ für alle $x \in M$: Falls

(i) $p(x)$ für alle explizit angegebenen $x \in M$,

(ii) für beliebige $x_1, ..., x_k \in M$ und daraus gemäß den Definitionsregeln erzeugbares $y \in M$ gilt:
Falls $p(x_1), ..., p(x_k)$, so $p(y)$,

dann: $p(x)$ für alle $x \in M$.

Betrachten Sie die Menge $N \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die wie folgt *induktiv* definiert ist:

(i) $(0, 0) \in N$, $(1, 1) \in N$.

(ii) Ist $(m, n) \in N$ dann ist $(m + 2, n) \in N$ und $(m, n + 2) \in N$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $(x, y) \in N$ gilt: $x + y$ ist gerade.

Geben Sie Ihre Lösung in einer Textdatei `2-3.txt` oder `2-3.pdf` ab.