Abschnitt 3: Mathematische Grundlagen

Überblick

Mengen

- Die Charakterisierung von Daten in der Vorlesung setzt den Mengen-Begriff voraus.
- Als informelle Definition genügt uns:

  Eine *Menge* M ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den *Elementen* der Menge.
- Die Notation $a \in M$ bedeutet: a ist ein Element der Menge M.
- Eine Menge kann beliebig viele Elemente enthalten, also z.B. auch gar keine. In diesem Fall spricht man von der *leeren Menge*, geschrieben $\emptyset$ oder $\{\}$.

Mengen

- Eine Menge kann z.B. *extensional* durch Aufzählung der Elemente definiert werden.
- Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle.
- Man kann eine Menge aber auch *intensional* definieren, d.h. durch Angabe einer Bedingung, die alle Elemente und nur die Elemente der Menge erfüllen.
- Beispiel: Menge M der Quadratzahlen, die kleiner als 30 sind
  - Extensional: $M = \{1, 4, 9, 16, 25\} = \{4, 1, 9, 25, 16\}$
  - Intensional: $M = \{a | a \in \mathbb{N}, a$ ist Quadratzahl und $a < 30\}$
- Beispiel leere Menge:
  - Extensional: $M = \{\}$
  - Intensional: $M = \{a | a \in \mathbb{N}, a < 2$ und $a > 1\}$

Eigenschaften von Mengen

- Alle Elemente einer Menge sind verschieden.
- Man könnte zwar eine Menge $\{1, 2, 2, 3\}$ angeben, dies wäre aber redundant. Die gleiche Menge wird durch $\{1, 2, 3\}$ definiert.
- Mit dem Konzept einer Menge kann man also nicht mehrfaches Vorkommen eines gleichen Elementes (Wertes) modellieren.
- Hierzu dient z.B. das Konzept der *Multimengen*, die wie Mengen geschrieben werden, aber andere Eigenschaften und Rechenregeln haben.
- Soll auch die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielen, sind Mengen nicht für die Modellierung geeignet.

Eigenschaften von Mengen

- Es gelten folgende wichtige Eigenschaften von Mengen und Beziehungen zwischen Mengen:

Bezeichnung	Notation	Bedeutung
M ist Teilmenge von N	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
M ist echte Teilmenge von N	$M \subset N$	es gilt $M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung von M und N	$M \cup N$	$\{x \vert x \in M$ oder $x \in N\}$
Schnittmenge von N und M	$M \cap N$	$\{x \vert x \in M$ und $x \in N\}$
Differenz M ohne N	$M \setminus N$	$\{x \vert x \in M$ und $x \notin N\}$
M und N sind disjunkt	$M \cap N = \emptyset$	M und N haben keine gemeinsamen Elemente
Kardinalität einer Menge M	$\vert M \vert$	Anzahl der Elemente von M

Multimengen

- Wie eben diskutiert, zeichnen sich Mengen dadurch aus, dass alle ihre Elemente paarweise verschieden sind
- Manchmal erwünscht: Mehrfachauftretende Elemente sollen entsprechend mehrfach in der „Menge“ vorkommen
- Beispiel: Die Menge der in dem Wort MATHEMATIK vorkommenden Buchstaben ist
  - Als Menge: $M = \{A, E, H, I, K, M, T\}$
  - Unter Berücksichtigung der Häufigkeit: $MM = \{A, A, E, H, I, K, M, M, T, T\}$
- Eine *Multimenge* ist eine Zusammenfassung von Elementen, bei denen Elemente auch mehrfach auftreten können
- MM in obigem Beispiel ist eine Multimenge

Multimengen

- Die für Mengen bekannten Begriffe lassen sich leicht auf Multimengen übertragen
- Jede Multimenge kann nämlich durch Auflistung der Elemente unter Berücksichtigung ihres Vorkommens als Menge geschrieben werden (dadurch werden eigenlich gleiche Elemente künstlich unterschieden).
- Beispiel: Die Multimenge

  $$MM = \{A, A, E, H, I, K, M, M, T, T\}$$

  kann aufgeschrieben werden als Menge

  $$MM' = \{A^{(1)}, A^{(2)}, E, H, I, K, M^{(1)}, M^{(2)}, T^{(1)}, T^{(2)}\}$$

Tupel, kartesisches Produkt von zwei Mengen

- Die Elemente einer Menge können selbst zusammengesetzt sein aus verschiedenen Mengen.
- Ein *geordnetes Paar (Tupel)* (x, y) besteht aus zwei Werten x und y, wobei x die erste und y die zweite Komponente ist.
- Beispiel: Eine Spielkarte hat eine Farbe und ein Symbol: *(Karo,Bube)*, *(Herz,Dame)*, ...
- Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus M und zweiter Komponente aus N:

$$M \times N := \{(x, y) | x \in M \text{ und } y \in N\}.$$

- Beispiel: Für $S = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, Knig, Ass\}$ und $F = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$, können wir ein Kartenspiel als die Menge $F \times S$ definieren.

n-Tupel, kartesisches Produkt von n Mengen

- Die Konzepte “Tupel” und “kartesisches Produkt zweier Mengen” lassen sich leicht auf eine beliebige Anzahl n von Mengen verallgemeinern.
- Das allgemeine kartesische Produkt über n Mengen ist die Menge aller geordneten *n-Tupel* mit den Komponenten aus diesen Mengen:

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n :=$$

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in M_1 \text{ und } a_2 \in M_2 \ldots \text{ und } a_n \in M_n\}.$$

- Sind alle Mengen identisch ($M_i = M_j$ für alle $1 \leq i, j \leq n$), schreibt man für $M \times M \times \ldots \times M$ häufig auch M^n.

Potenzmenge

- Viele Objekte werden durch Mengen beschrieben.
- Der Wertebereich einer Datenmenge solcher Objekte ist dann eine Menge, die Mengen enthält.
- Eine spezielle Form solcher Mengen von Mengen ist die *Potenzmenge*: Die Potenzmenge einer Grundmenge U ist die Menge aller Teilmengen von U, geschrieben $\mathcal{P}(U)$.
- Beispiel: $U = \{d, f, s\}$
  $\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{d\}, \{f\}, \{s\}, \{d, f\}, \{d, s\}, \{f, s\}, \{d, f, s\}\}$

Relationen

- Eine *n-stellige Relation* R ist eine Menge von n-Tupeln, d.h. $R \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$ bzw. $R \in \mathcal{P}(M_1 \times \ldots \times M_n)$
- Prädikate wie z.B. die Beziehung "kleiner" ($a < b$) sind Beispiele für Relationen. Wir können also z.B. schreiben:
  - $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $(1, 2) \in <$
  - $(2, 1) \notin <$
- Eine (n-stellige) Relation R ist *erfüllt* (oder *wahr*) für alle n-Tupel a mit $a \in R$ und nur für diese Tupel. Man schreibt auch: Ra.
- Für zweistellige Relationen schreibt man auch xRy (z.B.: $x < y$).

Eigenschaften zweistelliger Relationen

Sei $R \subseteq M \times M$ (d.h. $R \in \mathcal{P}(M \times M)$).

- R ist *reflexiv*, wenn für alle $x \in M$ gilt: xRx.
- R ist *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus xRy folgt yRx.
- R ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: aus xRy und yRx folgt $x = y$.
- R ist *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt: aus xRy und yRz folgt xRz.
- R ist *alternativ*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx.

Äquivalenzrelation

- Sei $R \in \mathcal{P}(M \times M)$.
- R ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- Beispiel: Wenn für ein Kartenspiel $F \times S$ mit $S = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, \text{König}, Ass\}$ und $F = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$ beim Vergleich zweier Karten die Farbe keine Rolle spielt, sondern zwei Karten mit dem gleichen Symbol als gleich gelten, ist die entsprechende Äquivalenzrelation:

$$\{((f_1, s_1), (f_2, s_2)) \mid f_1 \in F, f_2 \in F, s_1 \in S, s_2 \in S, s_1 = s_2\}$$

Ordungsrelationen

Bestimmte Kombinationen von Eigenschaften qualifizieren eine Relation zur *Ordnungsrelation*, durch deren Anwendung man beispielsweise eine Menge sortieren könnte:

Sei $R \in \mathcal{P}(M \times M)$.

- R ist eine *partielle Ordnung*, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- R ist eine *totale Ordnung*, wenn R eine alternative partielle Ordnung ist.

Auf den ganzen Zahlen gibt es die Ordnungsrelation $\leq \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Ist diese Ordnungsrelation total?

Funktionen (Abbildungen)

- Eine *Funktion* ist eine Abbildung von einer bestimmten Menge auf eine bestimmte Menge.
- Funktionen können wir als Relationen mit speziellen Eigenschaften auffassen, sie stellen nämlich eine *rechtseindeutige* Beziehung zwischen Definitionsbereich und Bildbereich dar.
- Formal gesehen ist eine Funktion f eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times B$, für die gilt: Aus $(x,y) \in f$ und $(x,z) \in f$ folgt $y = z$, d.h. einem Element aus D ist höchstens ein Element aus B eindeutig zugeordnet.
- Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f.
- Die Menge B heißt *Bildbereich* von f.
- Als Schreibweisen sind gebräuchlich:

$$(x,y) \in f \iff y = f(x) \iff f(x) = y \iff f : x \mapsto y$$

- $x \in D$ heißt auch *Urbild*.
- $y \in B$ heißt auch *Bild*.

Signatur von Funktionen

Da Funktionen spezielle Relationen sind, stammen sie aus Wertebereichen, die Teilmengen der Wertebereiche entsprechend strukturierter Relationen sind:

- Die Menge $D \to B$ ist die Menge aller Funktionen, die D als Definitionsbereich und B als Bildbereich haben. $D \to B$ enthält als Elemente alle Mengen von Tupeln $(d, b) \in (D \times B)$, die Funktionen sind.
- Es gilt: $D \to B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$.
- Für eine Funktion $f \in D \to B$ gilt: $f \subseteq D \times B$.
- Man schreibt: $f : D \to B$, d.h. f hat die *Signatur* $D \to B$.
- “Signatur” ist ein zentrales Konzept in der Spezifikation von Programmen.

Eigenschaften von Funktionen

- Eine Funktion $f : D \to B$ ist
  - *total*, wenn es für jedes $x \in D$ ein Paar $(x, y) \in f$ gibt;
  - *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ mindestens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt (jedes Bild hat mindestens ein Urbild);
  - *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ höchstens ein Paar $(x, y) \in f$ gibt (jedes Bild hat höchstens ein Urbild);
  - *bijektiv* (*eindeutig*), wenn f zugleich surjektiv und injektiv ist (jedes Bild hat genau ein Urbild).
- Man sagt auch, eine Funktion ist *partiell*, wenn es gleichgültig ist, ob sie total ist oder nicht.
- Vorsicht: Wenn ein Mathematiker nicht angibt, ob eine Funktion total oder partiell ist, meint er in der Regel eine totale Funktion. Für einen Informatiker ist die partielle Funktion der Normalfall.

Stelligkeit von Funktionen

- Funktionen aus $D \rightarrow B$ sind n-stellig, wenn der Definitionsbereich D eine Menge von n-Tupeln ist.
- Ist D nicht als kartesisches Produkt strukturiert, so sind die Funktionen aus $D \rightarrow B$ 1-stellig, wenn D nicht leer ist, und 0-stellig, wenn D leer ist.
- 0-stellige Funktionen sind *konstante Funktionen*, kurz *Konstanten*, für jeweils einen Wert aus B, d.h. jeder Wert b aus B ($b \in B$) kann als 0-stellige Funktion $b : \emptyset \rightarrow B$ aufgefasst werden.
- In diesem Sinne kann man den Ausdruck $1 + 2$ als Verschachtelung von mehreren Funktionen auffassen:
  - $1 : \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$
  - $2 : \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$
  - $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Nocheinmal: Schreibweisen

- Die Notation $f(x_1, \ldots, x_n)$, die die “Anwendung” von f auf die Argumente $x_1, \ldots, x_n$ beschreibt, nennen wir *Funktionsschreibweise*.
- Bei 2-stelligen Funktionen verwendet man häufig auch die *Infixschreibweise* $x_1 f x_2$.
  Beispiel: $17 + 8$ statt $+(17, 8)$ für die Addition.
- Bei 1-stelligen Funktionen verwendet man gerne die *Präfixschreibweise* $f x_1$.
  Beispiel $\log 13$ statt $\log(13)$ für die Logarithmusfunktion.
- Manchmal ist jedoch auch die *Postfixschreibweise* $x_1 \ldots x_n f$ gebräuchlich.
  Beispiel: $21!$ statt $!(21)$ für die Fakultätsfunktion.
- Bemerkung: In der Mathematik gibt es Schreibweisen, die sich nicht direkt einer dieser Schreibweisen unterordnen lassen, z.B. $\sqrt{x}$ (Quadratwurzel), x^y (Potenzierung), $\frac{x}{y}$ (Division).

Prädikate

- Ein *Prädikat* ist eine Funktion aus $D \to \mathbb{B}$ wobei $\mathbb{B} = \{TRUE, FALSE\}$.
- Prädikate sind also eine Abbildung auf die Menge der booleschen Werte, d.h. der Bildbereich dieser Funktionen ist $\mathbb{B}$.
- Beipiel:
  $=: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$ ist ein Prädikat (die Gleichheitsrelation auf $\mathbb{Z}$).
  Es ist z.B.
  $$= (-321, -321) = TRUE$$
  oder anders ausgedrückt
  $$= (-321, -321) \mapsto TRUE$$
- Wir lassen als Schreibweise "$= TRUE$" meist weg und schreiben bei 2-stelligen Prädikaten in Infixschreibweise
  $$-321 = -321.$$

Folgen

- Eine *Folge* $(x_1, \dots, x_n)$ der Länge n über die Elemente einer Menge M (d.h. $x_i \in M$) ist ein n-Tupel von Werten aus M, d.h.

$$(x_1, \dots, x_n) \in M^n.$$

- Eine Folge $x \in M^0$ der Länge $n = 0$ wird *leere Folge* genannt.
- Die Menge aller nicht-leeren Folgen über M wird meist mit

$$M^+ = M^1 \cup M^2 \cup M^3 \cup \dots$$

bezeichnet.
- Die Menge aller Folgen (auch leerer) über M ist dann

$$M^* = M^0 \cup M^+.$$

- Die *Länge* einer Folge x wird auch mit $|x|$ bezeichnet.
- Ist x eine Folge über M, so wird M auch als *Grundmenge* von x bezeichnet.

Folgen: Projektion

- Die *Projektion*

$$\pi : M^n \times I_n \to M.$$

  bildet eine Folge $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Länge n und ein i $(1 \leq i \leq n)$ auf die i-te Komponente x_i der Folge ab.

- Die Menge $I_n = \{i | i \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq i \leq n\}$ heißt *Indexmenge*.
- Beispiel: $x = (4, 5, 6)$

  $\pi(x, 1) = 4$, $\pi(x, 2) = 5$, $\pi(x, 3) = 6$.

- Offensichtlich ist auch $x = (\pi(x, 1), \ldots, \pi(x, |x|))$ eine alternative Schreibweise für eine Folge x.

Folgen: Konkatenation

- Die *Konkatenation* $\circ : M^n \times M^m$ konkatiniert zwei Folgen beliebiger Länge (aber selber Grundmenge M) miteinander:

$$x \circ y = (\pi(x,1), \ldots, \pi(x,|x|), \pi(y,1), \ldots, \pi(y,|y|)),$$

oder anders ausgedrückt:

$$\pi((x \circ y), i) = \begin{cases} \pi(x,i) & \text{für } 1 \leq i \leq |x| \\ \pi(y, i - |x|) & \text{für } |x| + 1 \leq i \leq |x| + |y| \end{cases}$$

- Beispiel: Sei $M = \mathbb{N}_0$ und $x = (7,0,3,18)$, $y = (21,3,7)$, dann ist

$$x \circ y = (\pi(x,1), \pi(x,2), \pi(x,3), \pi(x,4), \pi(y,5-4), \pi(y,6-4), \pi(y,7-4))$$

$$= (7,0,3,18,21,3,7).$$