

Einführung in die Programmierung
WS 2012/13

Übungsblatt 3: Eigenschaften von Algorithmen, Mengen und Abbildungen

Besprechung: 14./16./19.11.2012

Ende der Abgabefrist: Dienstag, 13.11.2012 14:00 Uhr.

Hinweise zur Abgabe:

Geben Sie bitte Ihre gesammelten Lösungen zu diesem Übungsblatt in einer Datei `loesung03.zip` unter <https://uniworx.ifi.lmu.de> ab. Aufgabe 3-1 wird nicht bewertet.

Aufgabe 3-1 *Allgemeine Induktion*

0 Punkte

Das Zusammenspiel zwischen induktiver Mengendefinition und induktivem Beweisprinzip läßt sich nicht nur auf $\mathbb{N}$ anwenden, sondern auch auf andere Mengen übertragen. Die induktive Definition einer Menge M besteht im allgemeinen aus

- (i) der expliziten Angabe gewisser Elemente von M ,
- (ii) Regeln zur "Erzeugung" weiterer Elemente $y \in M$ aus schon vorhandenen $x_1, x_2, \dots, x_k \in M$

zusammen mit der (oft nicht mehr explizit angegebenen) Feststellung, dass M nur Elemente gemäß i) und ii) enthält (und sonst keine weiteren).

Analog zur Situation bei $\mathbb{N}$ erhält man auch im allgemeinen Fall ein Induktionsprinzip für Beweise der Gültigkeit von Aussagen $p(x)$ für alle $x \in M$: Falls

- (i) $p(x)$ für alle explizit angegebenen $x \in M$,
- (ii) für beliebige $x_1, \dots, x_k \in M$ und daraus gemäß den Definitionsregeln erzeugbares $y \in M$ gilt:
Falls $p(x_1), \dots, p(x_k)$, so $p(y)$,

dann: $p(x)$ für alle $x \in M$.

Betrachten Sie die Menge $N \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die wie folgt *induktiv* definiert ist:

- (i) $(0, 0) \in N, (1, 1) \in N$.
- (ii) Ist $(m, n) \in N$ dann ist $(m + 2, n) \in N$ und $(m, n + 2) \in N$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $(x, y) \in N$ gilt: $x + y$ ist gerade.

Geben Sie Ihre Lösung in einer Textdatei `induktionAllgemein.txt` oder `induktionAllgemein.pdf` ab.

Aufgabe 3-2 *Boolesche Algebra***5 Punkte**

In der Vorlesung wurde die Menge der booleschen Werte $\mathbb{B} = \{TRUE, FALSE\}$ eingeführt. Funktionen auf diesem Wertebereich (boolesche Funktionen) werden häufig mit Hilfe von Wahrheitstabellen (oder Wahrheitstafeln) definiert. Unter einer Wahrheitstabelle versteht man die tabellarische Aufstellung des Wahrheitsverlaufs einer booleschen Funktion. Die Wahrheitstabelle zeigt für alle möglichen Zuordnungen von Wahrheitswerten, welchen Wahrheitswert die Gesamtaussage unter der jeweiligen Zuordnung annimmt.

- Die einstellige Funktion

$$\neg : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

(gesprochen “nicht”) ist definiert durch folgende Wahrheitstabelle:

x	$\neg x$
<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>
<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>

Das bedeutet: Die Funktion $\neg$ bildet den Wert *TRUE* auf den Wert *FALSE* und umgekehrt ab.

- Die zweistelligen Funktionen

$$\vee : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

(gesprochen “oder”) und

$$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

(gesprochen “und”) sind definiert durch die Wahrheitstabelle:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$
<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>
<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>
<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>
<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>

- Die zweistelligen Funktion

$$\Rightarrow: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

(gesprochen “impliziert”) ist definiert durch folgende Wahrheitstabelle:

x	y	$x \Rightarrow y$
<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>
<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>
<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>
<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>

Gegeben sei nun folgende dreistellige Funktion:

$$f: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$f(x, y, z) = (((\neg x) \vee y) \Rightarrow (y \wedge z))$$

Klammern bezeichnen einen Vorrang, d.h., um den Wert von f zu bestimmen, ist zunächst der Wert von $(\neg x)$ bzw. $(y \wedge z)$ zu bestimmen.

Vervollständigen Sie folgende Tabelle aus Datei `boolle.txt`, und geben Sie diese Datei als Lösung ab:

x	y	z	f
<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	
<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	
<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	
<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	
<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	<i>FALSE</i>	
<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	<i>TRUE</i>	
<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>FALSE</i>	
<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	<i>TRUE</i>	

Aufgabe 3-3 p -adische Zahlendarstellungen

10 Punkte

Die Datei `p-adisch.txt` enthält folgende Tabelle:

$p = 2$	$p = 8$	$p = 10$	$p = 16$
1101	15	13	D
		253	
			29E
110100011			
	61		

Ergänzen Sie die Tabelle so, dass in jeder Zeile die verschiedenen p -adischen Zahlendarstellungen für die selbe Zahl stehen.

Aufgabe 3-4 Darstellung negativer Zahlen und Mengen von Zahlen

10 Punkte

In der Vorlesung haben wir die p -adische Darstellung von natürlichen Zahlen kennengelernt. Wenn man eine bestimmte Anzahl n von Stellen annimmt, lässt sich eine schematische Darstellung von ganzen Zahlen (die Sie formeller erst später kennenlernen) im Binärsystem (d.h. $p = 2$) wie folgt veranschaulichen:

$$-2^{n-1} \cdot a_{n-1} + 2^{n-2} \cdot a_{n-2} + \dots + 2^1 \cdot a_1 + 2^0 \cdot a_0$$

wobei $a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0$ eine Zeichenreihe aus dem Alphabet $\{0, 1\}$ ist. Hier wird also der erste Summand negiert. Dadurch sind mit einer Zeichenkette der Länge n nicht die Zahlen von 0 bis p^n darstellbar, sondern die Zahlen von $-p^{n-1}$ bis $p^{n-1} - 1$. Für $n = 8$ wäre somit die kleinste darstellbare Zahl -128 mit der Binärdarstellung 10000000, die größte Zahl 127 mit der Binärdarstellung 01111111.

Betrachten wir nun folgende Menge $A \subseteq \mathbb{Z}$ von Zahlen:

$$A = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Sei eine Funktion $f : A \rightarrow A$ definiert wie folgt:

$f(-8)$	$=$	1	$f(0)$	$=$	0
$f(-7)$	$=$	-7	$f(1)$	$=$	-8
$f(-6)$	$=$	5	$f(2)$	$=$	4
$f(-5)$	$=$	-3	$f(3)$	$=$	-4
$f(-4)$	$=$	3	$f(4)$	$=$	2
$f(-3)$	$=$	-5	$f(5)$	$=$	-6
$f(-2)$	$=$	7	$f(6)$	$=$	6
$f(-1)$	$=$	-1	$f(7)$	$=$	-2

Welcher tiefere Sinn steckt wohl hinter dieser Funktion? Erklären Sie in einer Datei `darstellung.txt` oder `darstellung.pdf` die Bedeutung der Funktion.