



LUDWIG-  
MAXIMILIANS-  
UNIVERSITY  
MUNICH

  
DEPARTMENT  
INSTITUTE FOR  
INFORMATICS

  
DATABASE  
SYSTEMS  
GROUP

## Kapitel 2

# Mathematische Grundlagen

Skript zur Vorlesung  
Einführung in die Programmierung  
im Wintersemester 2012/13  
Ludwig-Maximilians-Universität München  
(c) Peer Kröger, Arthur Zimek 2009,2012



2.1 Mengen und Abbildungen

2.2 Induktion und Rekursion

2.3 Ausdrücke

## 2.1 Mengen und Abbildungen

- Die Charakterisierung von Daten in der Vorlesung setzt den Mengen-Begriff voraus.
- Als informelle Definition genügt uns:  
Eine *Menge*  $M$  ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den *Elementen* der Menge.
- Die Notation  $a \in M$  bedeutet:  $a$  ist ein Element der Menge  $M$ .
- Eine Menge kann beliebig viele Elemente enthalten, also z.B. auch gar keine. In diesem Fall spricht man von der leeren Menge, geschrieben  $\emptyset$  oder  $\{\}$ .

- Eine Menge kann z.B. *extensional* durch Aufzählung der Elemente definiert werden.
- Die Reihenfolge der Elemente spielt dabei keine Rolle.
- Man kann eine Menge aber auch *intensional* definieren, d.h. durch Angabe einer Bedingung, die alle Elemente und nur die Elemente der Menge erfüllen.
- Beispiel:
  - Menge  $M$  der Quadratzahlen, die kleiner als 30 sind.
    - Extensional:  $M = \{1, 4, 9, 16, 25\} = \{4, 1, 9, 25, 16\}$
    - Intensional:  $M = \{a \mid a \in \mathbb{N}, a \text{ ist Quadratzahl und } a < 30\}$
  - Leere Menge
    - Extensional:  $M = \{\}$
    - Intensional:  $M = \{a \mid a \in \mathbb{N}, a < 2 \text{ und } a > 1\}$

- Alle Elemente einer Menge sind verschieden.
- Man könnte zwar eine Menge  $\{1, 2, 2, 3\}$  angeben, dies wäre aber redundant. Die gleiche Menge wird durch  $\{1, 2, 3\}$  definiert.
- Mit dem Konzept einer Menge kann man also nicht mehrfaches Vorkommen eines gleichen Elementes (Wertes) modellieren.
- Hierzu dient z.B. das Konzept der Multimengen, die wie Mengen geschrieben werden, aber andere Eigenschaften und Rechenregeln haben.
- Spielt die Reihenfolge der Elemente eine Rolle, sind Mengen nicht für die Modellierung geeignet

- Es gelten folgende wichtige Eigenschaften von Mengen und Beziehungen zwischen Mengen:

Bezeichnung	Notation	Bedeutung
$M$ ist Teilmenge von $N$	$M \subseteq N$	aus $a \in M$ folgt $a \in N$
$M$ ist echte Teilmenge von $N$	$M \subset N$	es gilt $M \subseteq N$ und $M \neq N$
Vereinigung von $M$ und $N$	$M \cup N$	$\{x   x \in M \text{ oder } x \in N\}$
Schnittmenge von $N$ und $M$	$M \cap N$	$\{x   x \in M \text{ und } x \in N\}$
Differenz $M$ ohne $N$	$M \setminus N$	$\{x   x \in M \text{ und } x \notin N\}$
$M$ und $N$ sind disjunkt	$M \cap N = \emptyset$	$M$ und $N$ haben keine gemeinsamen Elemente
Kardinalität einer Menge $M$	$ M $	Anzahl der Elemente von $M$

- Die Elemente einer Menge können selbst zusammengesetzt sein aus verschiedenen Mengen.
- Ein *geordnetes Paar (Tupel)*  $(x, y)$  besteht aus zwei Werten  $x$  und  $y$ , wobei  $x$  die erste und  $y$  die zweite Komponente ist.
  - Beispiel: Eine Spielkarte hat eine Farbe und ein Symbol:  
 $(Karo, Bube), (Herz, Dame)$ .
- Das *kartesische Produkt*  $M \times N$  zweier Mengen  $M$  und  $N$  ist die Menge aller geordneten Paare mit erster Komponente aus  $M$  und zweiter Komponente aus  $N$ :

$$M \times N := \{(x, y) | x \in M \text{ und } y \in N\}$$

- Beispiel: Für  $S = \{7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass\}$  und  $F = \{Kreuz, Pik, Herz, Karo\}$ , können wir ein Kartenspiel als die Menge  $F \times S$  definieren.

- Die Konzepte “Tupel” und “kartesisches Produkt zweier Mengen” lassen sich leicht auf eine beliebige Anzahl  $n$  von Mengen verallgemeinern.
- Das allgemeine kartesische Produkt über  $n$  Mengen ist die Menge aller geordneten  $n$ -Tupel mit den Komponenten aus diesen Mengen:

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in M_1 \text{ und } a_2 \in M_2 \dots \text{ und } a_n \in M_n\}.$$

- Sind alle Mengen identisch ( $M_i = M_j$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ ), schreibt man für  $M \times M \times \dots \times M$  häufig auch  $M^n$ .

- Viele Objekte werden durch Mengen beschrieben.
- Der Wertebereich einer Datenmenge solcher Objekte ist dann eine Menge, die Mengen enthält.
- Eine spezielle Form solcher Mengen von Mengen ist die *Potenzmenge*:

Die Potenzmenge einer Grundmenge  $U$  ist die Menge aller Teilmengen von  $U$ , geschrieben  $\mathcal{P}(U)$ .

- Beispiel:  $U = \{d, f, s\}$   
 $\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{d\}, \{f\}, \{s\}, \{d, f\}, \{d, s\}, \{f, s\}, \{d, f, s\}\}$
- Für eine Menge der Kardinalität  $n$ , welche Kardinalität hat ihre Potenzmenge?

- Anwendungsbeispiel:  
Modellieren der Lösungsmenge einer Aufgabe.
- Aufgabe: Anzahl der Münzen, die nötig sind, einen bestimmten Geldbetrag auszugeben.
- Je nach Geldbetrag und den Werten der verfügbaren Münzarten gibt es keine, eine oder mehrere Zahlen als Antwort.
- Der Wertebereich der prinzipiell möglichen Lösungen ist  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$   
(unter der Annahme, dass es für alle Zahlen in  $\mathbb{N}$  eine Münze gibt)

- Eine  $n$ -stellige *Relation* ist eine Menge von  $n$ -Tupeln.
- Prädikate wie z.B. die Beziehung "kleiner" ( $a < b$ ) sind Beispiele für Relationen.

Wir können also z.B. schreiben:

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  - $(1, 2) \in <$
  - $(2, 1) \notin <$
- Eine Relation  $R$  ist erfüllt (oder wahr) für alle Tupel  $a$  mit  $a \in R$  und nur für diese Tupel. Man schreibt auch:  $Ra$ .
  - Für zweistellige Relationen schreibt man auch  $xRy$  (z.B.:  $x < y$ ).

Sei  $R \subseteq M \times M$  (d.h.  $R \in \mathcal{P}(M \times M)$ ).

- $R$  ist *reflexiv*, wenn für alle  $x \in M$  gilt:  $xRx$ .
- $R$  ist *symmetrisch*, wenn für alle  $x, y \in M$  gilt: aus  $xRy$  folgt  $yRx$ .
- $R$  ist *antisymmetrisch*, wenn für alle  $x, y \in M$  gilt: aus  $xRy$  und  $yRx$  folgt  $x = y$ .
- $R$  ist *transitiv*, wenn für alle  $x, y, z \in M$  gilt: aus  $xRy$  und  $yRz$  folgt  $xRz$ .
- $R$  ist *alternativ*, wenn für alle  $x, y \in M$  gilt:  $xRy$  oder  $yRx$ .

- Sei  $R \in \mathcal{P}(M \times M)$ .
- $R$  ist eine **Äquivalenzrelation**, wenn  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
  - Beispiel: Wenn für ein Kartenspiel  $F \times S$  mit  $S = \{7, 8, 9, 10, \text{Bube}, \text{Dame}, \text{König}, \text{Ass}\}$  und  $F = \{\text{Kreuz}, \text{Pik}, \text{Herz}, \text{Karo}\}$  beim Vergleich zweier Karten die Farbe keine Rolle spielt, sondern zwei Karten mit dem gleichen Symbol als gleich gelten, ist die entsprechende Äquivalenzrelation:

$$\{((f_1, s_1), (f_2, s_2)) \mid f_1 \in F, f_2 \in F, s_1 \in S, s_2 \in S, s_1 = s_2\}$$

Bestimmte Kombinationen von Eigenschaften qualifizieren eine Relation zur *Ordnungsrelation*, durch deren Anwendung man beispielsweise eine Menge sortieren könnte:

Sei  $R \in \mathcal{P}(M \times M)$ .

- $R$  ist eine *partielle Ordnung*, wenn  $R$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- $R$  ist eine *totale Ordnung*, wenn  $R$  eine alternative partielle Ordnung ist.

**Auf den ganzen Zahlen gibt es die Ordnungsrelation  $\leq \in \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ . Ist diese Ordnungsrelation total?**

- Eine *Funktion* ist eine Abbildung von einer Menge auf wiederum eine Menge.
- Funktionen können wir als Relationen mit speziellen Eigenschaften auffassen, sie stellen nämlich eine *rechtseindeutige* Beziehung zwischen Definitionsbereich und Bildbereich dar.
- Formal gesehen ist eine Funktion  $f$  eine 2-stellige Relation  $f \subseteq D \times B$ , für die gilt: Aus  $(x, y) \in f$  und  $(x, z) \in f$  folgt  $y = z$ , d.h. einem Element aus  $D$  ist höchstens ein Element aus  $B$  eindeutig zugeordnet.

- Die Menge  $D$  heißt *Definitionsbereich* von  $f$ .
- Die Menge  $B$  heißt *Bildbereich* von  $f$ .
- Als Schreibweisen sind gebräuchlich:

$$(x, y) \in f$$

$$y = f(x)$$

$$f(x) = y$$

$$f : x \mapsto y$$

Da Funktionen spezielle Relationen sind, stammen sie aus Wertebereichen, die Teilmengen der Wertebereiche entsprechend strukturierter Relationen sind:

- Die Menge  $D \rightarrow B$  ist die Menge aller Funktionen, die  $D$  als Definitionsbereich und  $B$  als Bildbereich haben.  $D \rightarrow B$  enthält als Elemente alle Mengen von Tupeln  $(d, b) \in (D \times B)$ , die Funktionen sind.
- Es gilt:  $D \rightarrow B \subseteq \mathcal{P}(D \times B)$ .
- Für eine Funktion  $f \in D \rightarrow B$  gilt:  $f \subseteq D \times B$ .
- Man schreibt:  $f : D \rightarrow B$ , d.h.  $f$  hat die **Signatur**  $D \rightarrow B$ .
- "Signatur" ist ein zentrales Konzept in der Spezifikation von Programmen.

- Eine Funktion  $f: D \rightarrow B$  ist
  - *total*, wenn es für jedes  $x \in D$  ein Paar  $(x, y) \in f$  gibt;
  - *surjektiv*, wenn es zu jedem  $y \in B$  ein Paar  $(x, y) \in f$  gibt;
  - *injektiv*, wenn es zu jedem  $y \in B$  höchstens ein Paar  $(x, y) \in f$  gibt;
  - *bijektiv*, wenn  $f$  zugleich surjektiv und injektiv ist.
- Man sagt auch, eine Funktion ist *partiell*, wenn es gleichgültig ist, ob sie total ist oder nicht.
- Vorsicht: Wenn ein Mathematiker nicht angibt, ob eine Funktion total oder partiell ist, meint er in der Regel eine totale Funktion. Für einen Informatiker ist die partielle Funktion der Normalfall.

- Funktionen aus  $D \rightarrow B$  sind *n-stellig*, wenn der Definitionsbereich  $D$  eine Menge von  $n$ -Tupeln ist.  
(Achtung es kann  $D = \emptyset$  sein, dann ist die Funktion 0-stellig)
- 0-stellige Funktionen sind *konstante Funktionen*, kurz *Konstanten*, für jeweils einen Wert aus  $B$ , d.h. jeder Wert  $b$  aus  $B$  ( $b \in B$ ) kann als 0-stellige Funktion  $b : \emptyset \rightarrow B$  aufgefasst werden.
- In diesem Sinne kann man den Ausdruck  $1 + 2$  als Verschachtelung von mehreren Funktionen auffassen:
  - $1: \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$
  - $2: \emptyset \rightarrow \mathbb{N}$
  - $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

## Nochmal: Schreibweisen

- Die Notation  $f(x_1, \dots, x_n)$ , die die “Anwendung” von  $f$  auf die Argumente  $x_1, \dots, x_n$  beschreibt, heißt *Funktionsschreibweise*.
- Bei 2-stelligen Funktionen verwendet man häufig auch die *Infixschreibweise*  $x_1 f x_2$ .  
Beispiel:  $17 + 8$  statt  $+(17, 8)$  für die Addition.
- Bei 1-stelligen Funktionen verwendet man gerne die *Präfixschreibweise*  $f x_1$ .  
Beispiel  $\log 13$  statt  $\log(13)$  für die Logarithmusfunktion.
- Manchmal ist jedoch auch die *Postfixschreibweise*  $x_1 \dots x_n f$  gebräuchlich.  
Beispiel:  $21!$  statt  $!(21)$  für die Fakultätsfunktion.

- Bemerkung: In der Mathematik gibt es Schreibweisen, die sich nicht direkt einer dieser Schreibweisen unterordnen lassen, z.B.  $\sqrt{x}$  (Quadratwurzel),  $x^y$  (Potenzierung),  $\frac{x}{y}$  (Division).

- Ein *Prädikat* ist eine Funktion  $D \rightarrow \mathbb{B}$  wobei  
 $\mathbb{B} = \{TRUE, FALSE\}$  die Menge der  
*booleschen Werte*.
- Beispiel:  
=:  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{B}$  ist ein Prädikat (die Gleichheitsrelation  
auf  $\mathbb{Z}$  ).  
Es ist z.B.  
 $= (-321, -321) = TRUE$   
oder anders ausgedrückt  
 $= (-321, -321) \mapsto TRUE$

- Wir lassen als Schreibweise " $= TRUE$ " meist weg und schreiben bei 2-stelligen Prädikaten in Infixschreibweise

$$-321 = -321.$$

- Eine *Folge*  $(x_1, \dots, x_n)$  der Länge  $n$  über die Elemente einer Menge  $M$  (d.h.  $x_i \in M$ ) ist ein  $n$ -Tupel von Werten aus  $M$ , d.h.

$$(x_1, \dots, x_n) \in M_n.$$

- Eine Folge  $x \in M_0$  der Länge  $n = 0$  wird *leere Folge* genannt.
- Die Menge aller nicht-leeren Folgen über  $M$  wird meist mit

$$M^+ = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots$$

bezeichnet.

- Die Menge aller Folgen (auch leerer) über  $M$  ist dann

$$M^* = M_0 \cup M^+.$$

- Die Länge einer Folge  $x$  wird auch mit  $|x|$  bezeichnet.

- Die *Projektion* auf ein Element einer Folge ist eine Abbildung

$$\pi : M^n \times I_n \rightarrow M.$$

- Die Menge  $I_n = \{i \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq i \leq n\}$  heißt *Indexmenge*.
- Die Abbildung  $\pi$  bildet eine Folge  $x = (x_1, \dots, x_n)$  der Länge  $n$  und ein  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) auf die  $i$ -te Komponente  $x_i$  der Folge ab.
- Beispiel:  $x = (4, 5, 6)$   
 $\pi(x, 1) = 4, \pi(x, 2) = 5, \pi(x, 3) = 6.$
- Anders als bei Mengen spielt damit die Reihenfolge der Elemente sehr wohl eine Rolle

- Offensichtlich ist auch  $x = (\pi(x, 1), \dots, \pi(x, |x|))$  eine alternative Schreibweise für eine Folge  $x$ .
- Die *Konkatenation* zweier Folgen ist definiert als  
 $x \circ y = (\pi(x, 1), \dots, \pi(x, |x|), \pi(y, 1), \dots, \pi(y, |y|))$ ,  
oder anders ausgedrückt:

$$\pi((x \circ y), i) = \begin{cases} \pi(x, i) & \text{für } 1 \leq i \leq |x| \\ \pi(y, i - |x|) & \text{für } |x| + 1 \leq i \leq |x| + |y| \end{cases}$$

- Beispiel: Sei  $M = \mathbb{N}_0$  und  $x = (7, 0, 3, 18)$ ,  $y = (21, 3, 7)$ ,  
dann ist  
 $x \circ y = (\pi(x, 1), \pi(x, 2), \pi(x, 3), \pi(x, 4), \pi(y, 5-4), \pi(y, 6-4), \pi(y, 7-4))$   
 $= (7, 0, 3, 18, 21, 3, 7)$ .