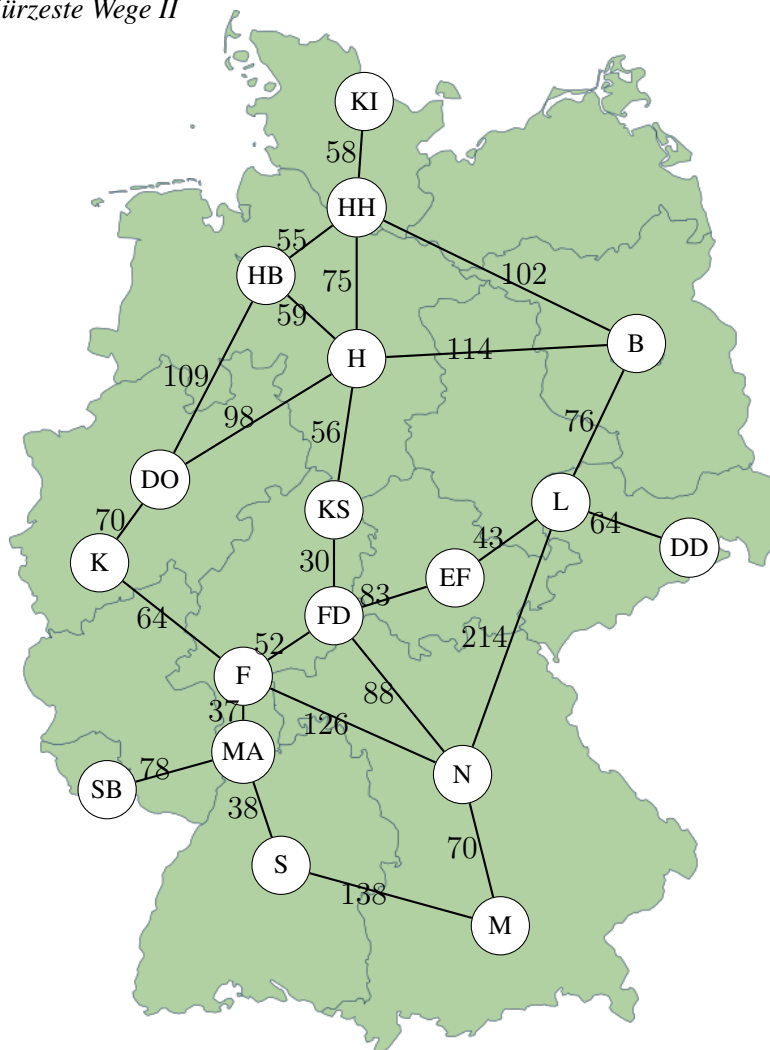


Algorithmen und Datenstrukturen
 SS 2019

Übungsblatt 11: Graphen II

Aufgabe 11-1 *Kürzeste Wege II*

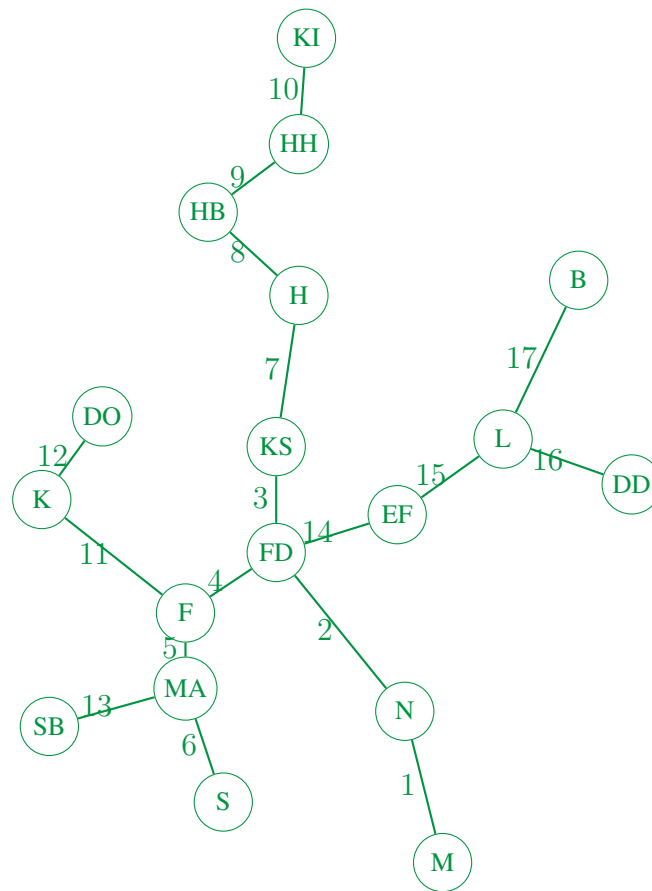


Die obige Karte zeigt wieder das Streckennetz einiger ICE-Direktverbindungen zwischen größeren deutschen Städten als ungerichteten Graphen. Als Kantengewichte sind die geschätzten Zeiten in Minuten angegeben, die ein Zug zwischen beiden Bahnhöfen braucht.

- (a) Wenden Sie dieses Mal den Prim-Algorithmus auf das Streckennetz an. Geben Sie den resultierenden minimalen Spannbaum an. Beginnen Sie mit München als Startknoten. Nummerieren Sie die Kanten in der Reihenfolge, in der sie hinzugefügt werden.
- (c) In den Vorlesungsfolien operieren diese Algorithmen auf gerichteten Graphen. Führt dies zu einem Problem? Warum (nicht)?

Lösungsvorschlag:

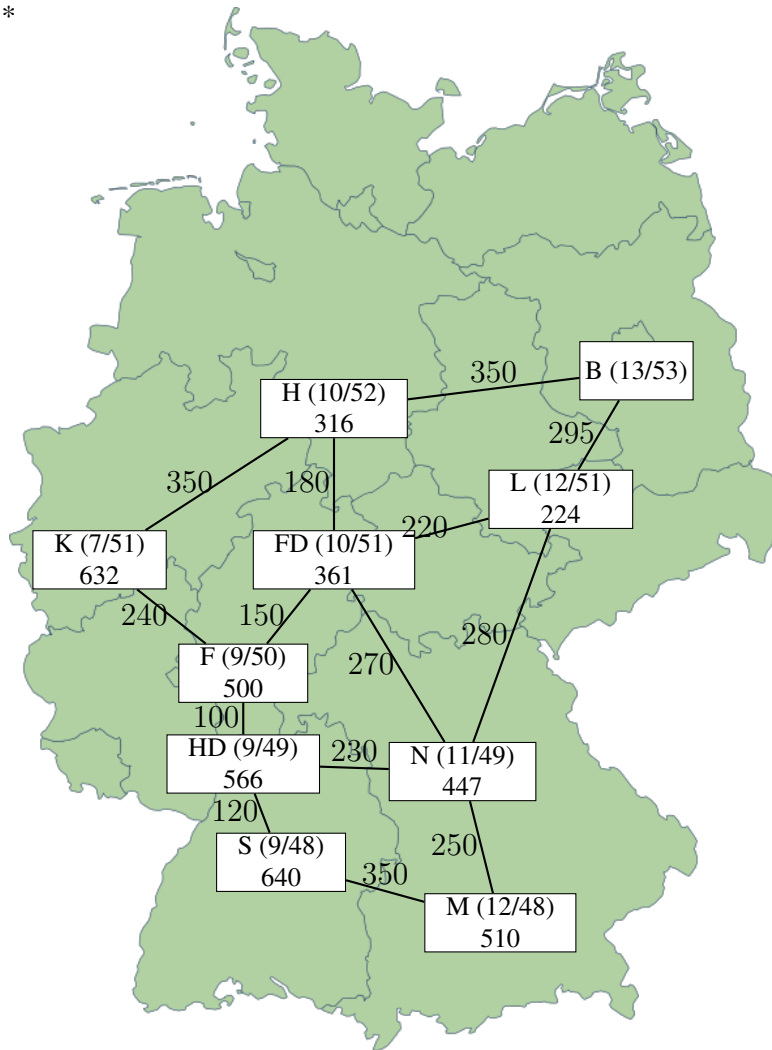
(a)



(b)

Nein, weil eine ungerichtete Kante (zwischen A und B) kann durch zwei Kanten (von A nach B und von B nach A) repräsentiert bzw. ersetzt werden.

Aufgabe 11-2 A*



Es sei wieder ein Graph mit Deutschlands Städten gegeben. Für jede Stadt ist zusätzlich der Längen- und Breitengrad (ϕ, θ) gegeben. Die Zahlenwerte unter den Städtebezeichnern können Sie vorerst ignorieren. Die Kantengewichte sind die Autobahnkilometer zwischen den Städten. Um effizient die kürzeste Auto-Reiseroute zu ermitteln, wollen Sie nun den A* Algorithmus verwenden.

- Welche Anforderungen muss eine Heuristik des A* Algorithmus erfüllen?
- Überlegen Sie sich qualitativ zwei unterschiedliche Heuristiken. Beachten Sie, dass die Erde eine Kugel ist! Sie müssen keinen mathematischen Ausdruck für ihre Heuristiken angeben.
- Bonus** Für einen durch Längen- und Breitengrad gegebenen Punkt (ϕ, θ) sind die kartesischen Koordinaten durch

$$\vec{r}(\phi, \theta) = R_{Erde} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie nun explizit eine Abstandsfunktion für ihre Heuristiken aus b) an.

Hinweis: $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a - b) = \cos(b - a)$

- Es sein nun folgende Heuristik gegeben:

$$h(\phi, \theta) = \sqrt{((\phi - \phi_{Berlin}) \cdot 100km)^2 + ((\theta - \theta_{Berlin}) \cdot 100km)^2} \quad (1)$$

Die Zahlenwerte unter den Städtebezeichnern im Graphen, entsprechen der durch h geschätzten Distanz nach Berlin. Benutzen sie nun h um den kürzesten Weg von Heidelberg nach Berlin mittels des A* Algorithmus zu finden. Welche Näherung wurde für h gemacht?

Lösungsvorschlag:

a) Eine Heuristik ist eine Funktion, die einen geschätzten Wert, für die zu optimierende Größe, von einem beliebigen Knoten zum Zielknoten berechnet. Der geschätzte Wert muss eine untere Grenze, des in dem realen Problem auftretenden Wertes sein. Konkret auf das gegebene Problem übertragen bedeutet das: Die Heuristik ist eine Funktion, die für jeden Knoten eine Länge zum Zielknoten schätzt. Der von der Heuristik berechnete Wert, muss kleiner oder gleich der Länge der Autobahnstrecke, von diesem Knoten zum Zielknoten sein.

b) 1. Direkte Tunnelverbindung

Für zwei Punkte auf der Erdoberfläche, ist der kürzeste Weg die direkte Verbindung durch einen hypothetischen Tunnel durch die Erde. Da es keine kürzere Strecke geben kann, sind die Eigenschaften einer Heuristik erfüllt.

2. Direkter Weg auf der Erdoberfläche

Da sich Autos üblicherweise nur auf der Erdoberfläche bewegen, ist auch der direkte Weg auf der Erdoberfläche eine untere Grenze an die Strecke. Es bleibt zu beachten, dass im Allgemeinen eine Gerade auf der Erdoberfläche, keine Gerade auf einer Karte ist.

c) 1. Die Länge eines Tunnels zwischen zwei Punkten auf der Erdoberfläche, ist die Länge des Vektors, der vom Startpunkt zum Zielpunkt zeigt. Der Vektor vom Startpunkt (ϕ, θ) zum Zielpunkt (ϕ_Z, θ_Z) ist gegeben durch: $\vec{l} = \vec{r}(\phi_Z, \theta_Z) - \vec{r}(\phi, \theta)$. Die Länge von $\vec{l}$ ist dann gegeben durch: $\|\vec{l}\| = \sqrt{\vec{l} \cdot \vec{l}} =$

$$R_{Erde} \cdot \sqrt{(\cos(\theta_Z)\cos(\phi_Z) - \cos(\theta)\cos(\phi))^2 + (\cos(\theta_Z)\sin(\phi_Z) - \cos(\theta)\sin(\phi))^2 + (\sin(\theta_Z) - \sin(\theta))^2}$$

Die Wurzel kann man weiter umformen:

$$\sqrt{1 + 1 - 2\cos(\theta_Z)\cos(\theta)(\cos(\cos(\phi_Z)\cos(\phi) + \sin(\phi_Z)\sin(\phi)) - 2\sin(\phi_Z)\sin(\phi))}$$

Mit dem Hinweis ergibt sich dann:

$$R_{Erde} \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(\theta)\cos(\theta_Z)\cos(\phi - \phi_Z) - 2 \cdot \sin(\theta)\sin(\theta_Z)}$$

2. Betrachte zunächst die Länge eines Kreissegmentes. Schließen der Start und der Zielpunkt gemeinsam mit dem Mittelpunkt den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ ein, so ist die Länge durch $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot R$ gegeben. Jede direkte Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Kugel ist Teil eines Kreises auf der Kugel. Für den Winkel α zwischen zwei Vektoren gilt $\vec{r}(\phi, \theta) \cdot \vec{r}(\phi_Z, \theta_Z) = \|\vec{r}(\phi, \theta)\| \|\vec{r}(\phi_Z, \theta_Z)\| \cdot \cos(\alpha)$. Es folgt

$$\cos(\alpha) = \cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\theta_Z)\cos(\phi_Z) + \cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\theta_Z)\sin(\phi_Z) + \sin(\theta)\sin(\phi)$$

Das kann mithilfe des Hinweises vereinfacht werden und mit anschließendem invertieren erhält man: $\alpha = \cos^{-1}(\sin(\theta)\sin(\theta_Z) + \cos(\theta)\cos(\theta_Z) \cdot \cos(\phi - \phi_Z))$. Einsetzen von α in die obige Formel für die Länge eines Kreissegmentes führt auf das Ergebnis.

d) Die gegebene Heuristik (1) betrachtet die Welt als eine Scheibe und berechnet anschließend die Distanz über den Satz von Pythagoras. Der Ablauf des Algorithmus wird durch folgende Tabelle dargestellt: Die linke Seite (Open-List) speichert für jede Stadt ihren direkten Vorgänger und die geschätzte Gesamtlänge vom Startknoten zum Zielknoten. Diese setzt sich aus dem bekannten Längenwert, von Startknoten zum entsprechenden Knoten und der durch die Heuristik geschätzten Länge zum Ziel zusammen. Die rechte Seite (Closed-List) speichert für jede Stadt ihren direkten Vorgänger, sowie die bekannte Länge vom Startknoten zum entsprechenden Knoten.

Lösungsvorschlag:	
$l_{HD} = 566$ (HD, 566)	
Von Heidelberg aus: $l_F = 100 + 500$ $l_N = 230 + 447$ $l_S = 120 + 640$ (F, HD, 600), (N, HD, 677), (S, HD, 760)	(HD, 0)
Von Frankfurt aus: $l_K = 340 + 632$ $l_{FD} = 250 + 361$ (FD, F, 610), (N, HD, 677), (S, HD, 760), (K, F, 972)	(HD, 0), (F, HD, 100)
Von Fulda aus: $l_H = 430 + 316$ $l_L = 470 + 224$ $l_N = 520 + 447 = 967$ (Zu lang) (N, HD, 677), (L, FD, 694), (H, FD, 746), (S, HD, 760), (K, F, 972)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250)
Von Nürnberg aus: $l_M = 480 + 510$ $l_L = 510 + 224 = 734$ (Zu lang) (L, FD, 694), (H, FD, 746), (S, HD, 760), (K, F, 972), (M, N, 990)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250), (N, HD, 230)
Von Leipzig aus: $l_B = 470 + 295$ (Hier wird keine Heuristik angewendet!) (H, FD, 746), (S, HD, 760), (B, L, 765), (K, F, 972), (M, N, 990)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250), (N, HD, 230), (L, FD, 470)
Von Hannover aus: $l_K = 780 + 632$ (Zu lang) $l_B = 430 + 350$ (Zu lang, wieder ohne Heuristik!) (S, HD, 760), (B, L, 765), (K, F, 972), (M, N, 990)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250), (N, HD, 230), (L, FD, 470), (H, FD, 430)
Von Stuttgart aus: $l_M = 470 + 510$ (M wird überschrieben!) (B, L, 765), (K, F, 972), (M, S, 980)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250), (N, HD, 230), (L, FD, 470), (H, FD, 430), (S, HD, 120)
Ziel gefunden (K, F, 972), (M, S, 980)	(HD, 0), (F, HD, 100), (FD, F, 250), (N, HD, 230), (L, FD, 470), (H, FD, 430), (S, HD, 120), (B, L, 765)