Ludwig-Maximilians-Universität München München, 05.07.2018
Institut für Informatik
Prof. Dr. Thomas Seidl
Anna Beer, Florian Richter

Algorithmen und Datenstrukturen

SS 2018

Übungsblatt Global 9: Flussnetzwerke

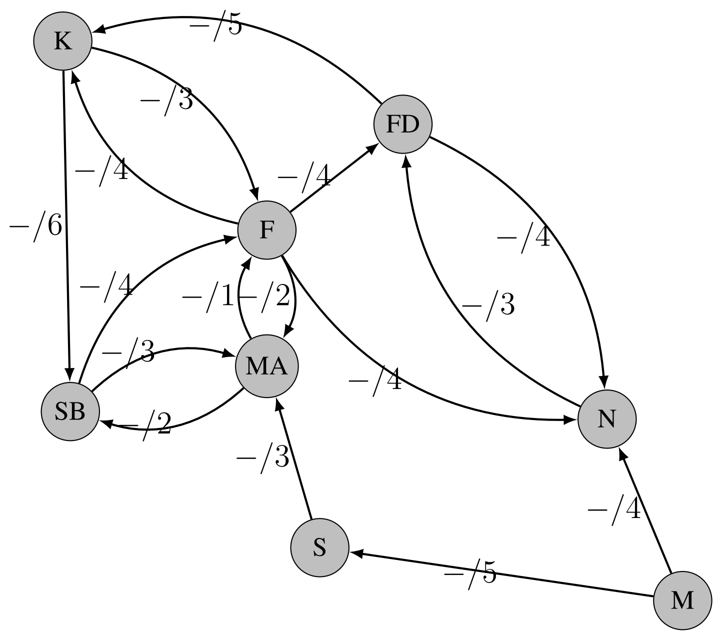
Aufgabe Global 9-1 *Knobeleien*

(a) Lösen Sie das 6-Damen-Problem. Zu langweilig? Lösen Sie das 7-Damen-Problem.
Tipp: Backtracking

(b) Gegeben ist ein Feld der größe $n \times n$ mit $n = 2^k$ für $k \geq 1$. In dem Feld ist ein Loch der größe 1×1. Füllen Sie das Feld mit L-förmigen Fliesen (Fliesen der Größe 2×2 , denen eine 1×1 große Ecke fehlt.)
Tipp: Divide-and-Conquer

Aufgabe Global 9-2 *Flussnetzwerke*

Gegeben sei ein Flussnetzwerk südlich gelegener deutscher Großstädte:



Im Folgenden möchten Sie als Verkehrsminister Engstellen im Verkehrsfluss auf einem Weg zwischen München und Köln finden. Aufgrund diverser Baumaßnahmen kommt es zu erheblichen Verzögerungen und teilweise nur einseitig befahrbaren Autobahnen. Einer Ihrer Berater hat vorgeschlagen, dass Sie diese Engstellen mit Hilfe von Flussnetzwerken aus der Graphentheorie finden können. Deshalb haben Sie das Netz als Flussnetzwerk inklusive aller Kapazitäten modelliert und definieren München(M) als Quelle und Köln(K) als Senke. (Die Einheit der Kapazität steht in etwa für einen durchschnittlichen Durchsatz von 1000 Autos in der Stunde.)

(a) Im ersten Schritt hat Sie Ihr Berater angewiesen, mit Hilfe des Edmonds-Karp-Algorithmus den maximalen Fluss zu berechnen. Für Ihre Zwecke reicht es, wenn Sie die bei Ausführung des Algorithmus entstehenden Residualnetzwerke und schließlich den (am Ende entstehenden) maximalen Fluss und dessen Gewicht angeben.

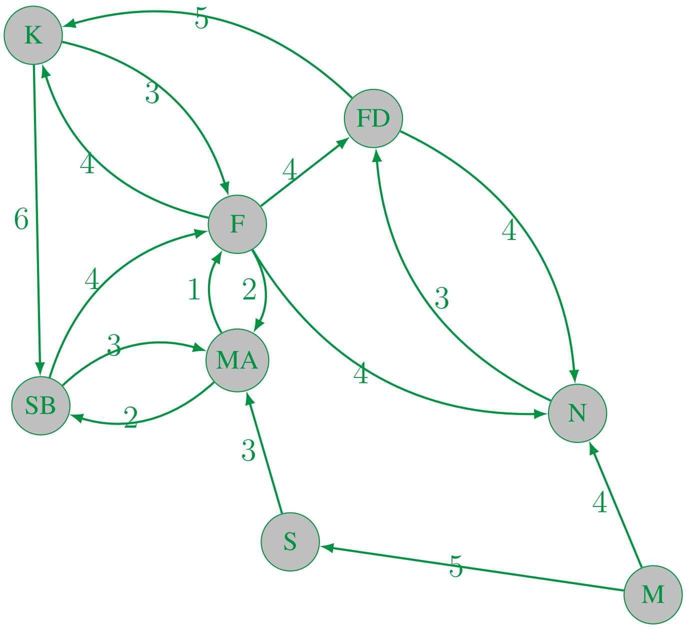
(b) Mit Hilfe des maximalen Flusses lässt sich nun die Kapazität des minimalen Schnitts in diesem Netzwerk berechnen. Geben Sie diese sowie die beiden Mengen S und T des minimalen Schnitts und die aus diesen Mengen entstehenden Netzwerke an.

(c) Ihr Berater meint, dass Sie nun alle wichtigen Komponenten ausgerechnet haben, um Engstellen auf dem Weg von München nach Köln zu erkennen. Wie stellen Sie das nun an?

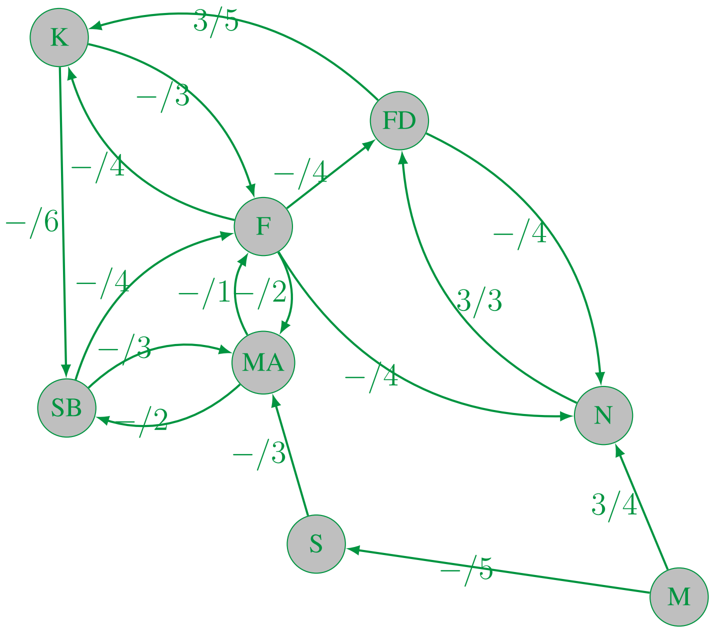
(d) Im folgenden kann nach etlichen Baumaßnahmen nun jeder Autobahnabschnitt zusätzlich in der Gegenfahrtrichtung befahren werden (also wird jede gerichtete Kante zwischen 2 Knoten aus den in Teilaufgabe (b) berechneten Mengen S und T durch eine ungerichtete Kante ersetzt). Um die Schönheit verschiedener Straßen und Städte in Süddeutschland bewundern zu können, planen Sie nun zwei Städte Touren. Eine Tour zwischen den Städten aus S und eine zwischen denen aus T. Sie möchten dabei jede Straße genau einmal befahren und schließlich wieder am Start ankommen, sofern das denn möglich ist. Ihr Berater meint, dass Sie das mit Hilfe der Geschlossenen Euler-Tour leicht überprüfen können. Folgen Sie dem Rat Ihres Beraters und überprüfen Sie, ob Sie Ihre geplanten Touren wie gewünscht antreten können.

Lösungsvorschlag:

(a) Erstes Residualnetzwerk zum Fluss mit f=0:

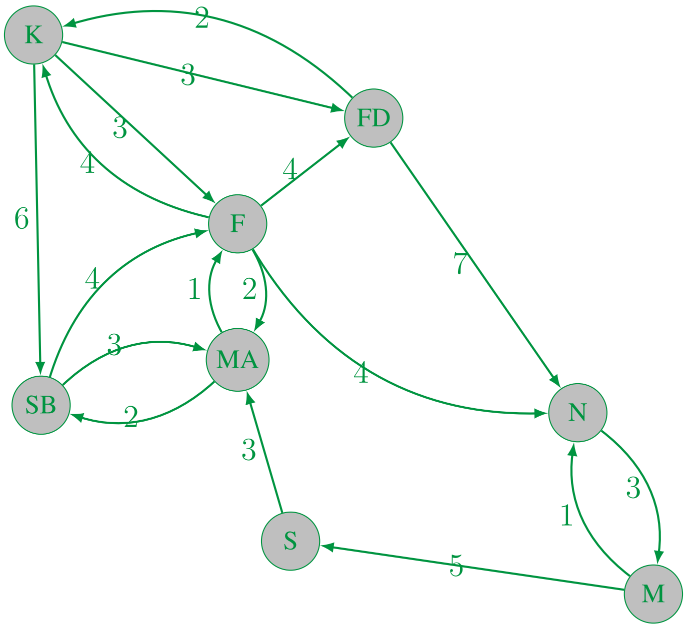


Kürzester Pfad p darin von München nach Köln: M $\rightarrow$ N $\rightarrow$ FD $\rightarrow$ K.
Damit ergibt sich für $c_f(p) = 3$
Setzte also $f = 3$ entlang dieses Pfades.



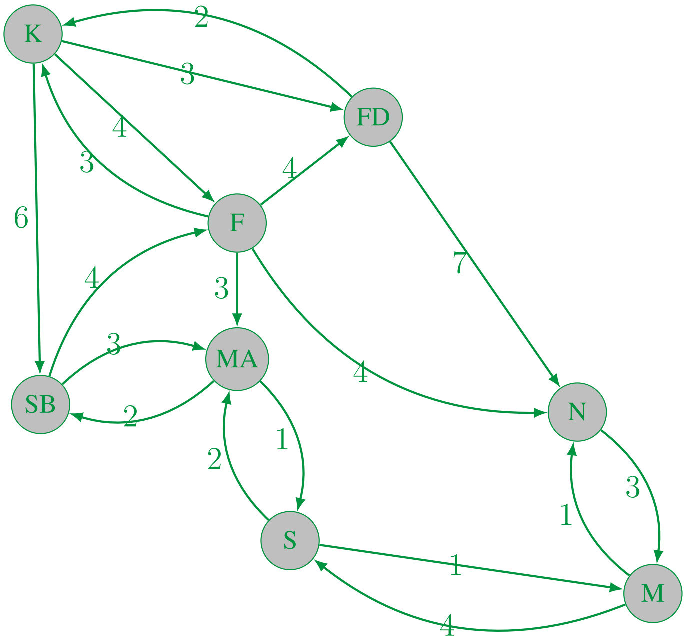
Lösungsvorschlag:

Das Residualnetzwerk ist dann also folgendes:

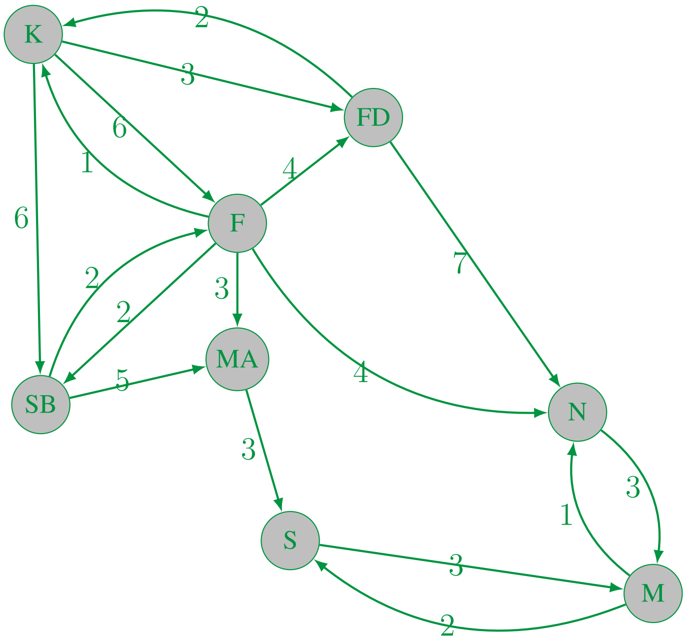


Lösungsvorschlag:

(a) Kürzester Pfad p von München nach Köln ist nun: M $\rightarrow$ S $\rightarrow$ MA $\rightarrow$ F $\rightarrow$ K.
Damit ergibt sich für $c_f(p) = 1$
Setzte also $f = 1$ entlang dieses Pfades. Für das neue Residualnetzwerk ergibt das:



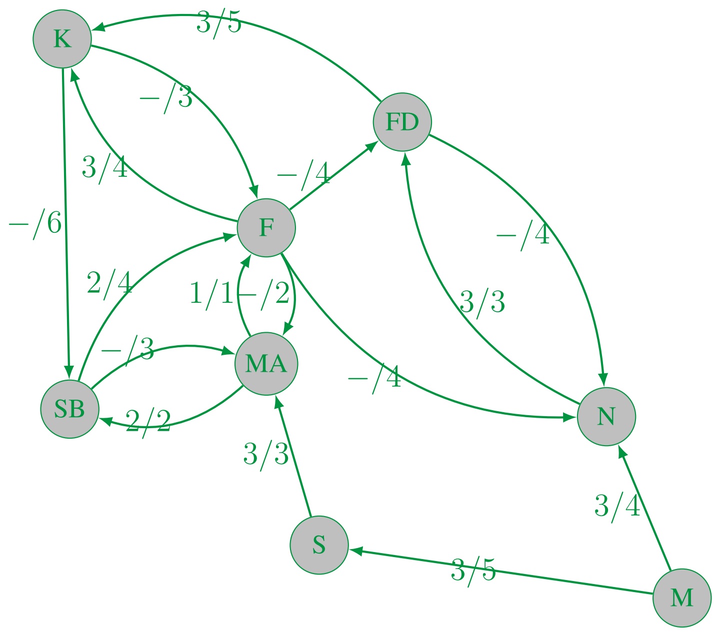
Kürzester Pfad p von München nach Köln ist nun: M $\rightarrow$ S $\rightarrow$ MA $\rightarrow$ SB $\rightarrow$ F $\rightarrow$ K.
Damit ergibt sich für $c_f(p) = 2$
Setze also $f = 2$ entlang dieses Pfades. Für das neue Residualnetzwerk ergibt das:



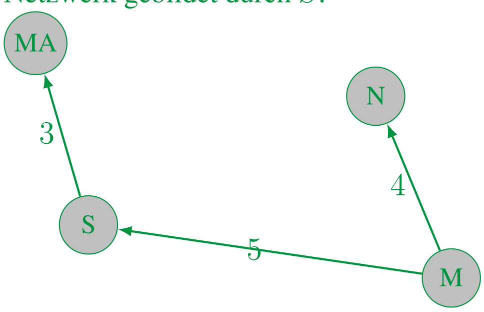
Es gibt nun keinen Pfad mehr von München nach Köln im Residualnetzwerk. Damit liegt das Gewicht des maximale Fluss (,der aus der Quelle München zur Senke Köln führt) bei $w(f) = 6$.

Lösungsvorschlag:

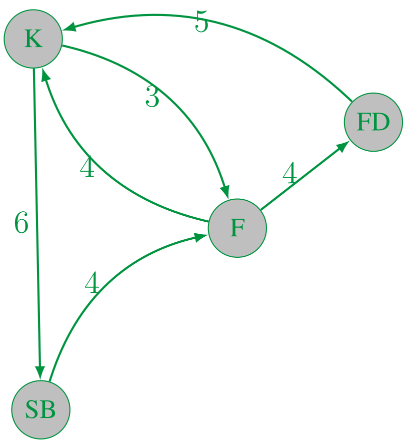
(a) Für den Fluss eingetragen im ursprünglichen Flussnetzwerk ergibt sich:



(b) Der minimale Schnitt des Netzwerkes hat den gleichen Wert wie der maximale Fluss und liegt somit bei $c(S,T) = 6$. Er entspricht der Gesamtkapazität aller durchtrennter gerichteter Kanten von einer disjunkten Menge S, zu einer disjunkten Menge T. In unserem Beispiel könnte man als Schnitt z.B. die Kanten $(N, FD), (MA, F), (MA, SB)$ durchtrennen.
Somit ergeben sich für die Mengen:
$S = \{MA, S, M, N\}$ und $T = \{K, F, FD, SB\}$
Und für die Netzwerke:
Netzwerk gebildet durch S:



Netzwerk gebildet durch T:



Lösungsvorschlag:

(c) Die Engstellen entsprechen genau den Kanten, welche beim minimalen Schnitt durchtrennt werden müssen. Hier können Sie nun als Verkehrsminister intervenieren und beispielsweise weitere Spuren bauen lassen, um den Verkehrsfluss zu erhöhen.

(d) Für S:

	MA	S	M	N
MA	0	1	0	0
S	1	0	1	0
M	0	1	0	1
N	0	0	1	0

Die Summen der Zeilen/Spalten MA und N sind ungerade $\Rightarrow$ Es existiert kein geschlossener Pfad über alle Kanten. Sie können Ihre Tour leider nicht antreten.

Für T:

	K	F	FD	SB
K	0	2	1	1
F	2	0	1	1
FD	1	1	0	0
SB	1	1	0	0

Die Summen aller Zeilen und Spalten sind gerade $\Rightarrow$ es existiert ein geschlossener Pfad über alle Kanten. Sie können also Ihre Tour antreten.