

Algorithmen und Datenstrukturen
SS 2018

Übungsblatt Global 5: Sortieren II

Aufgabe Global 5-1 *Knobelei: Würfel sortieren*

Gegeben sind vier Würfel mit folgenden Augenzahlen:

A 4,4,4,4,0,0

B 3,3,3,3,3,3

C 6,6,2,2,2,2

D 5,5,5,1,1,1

In einem 2-Spieler-Würfelspiel würfeln beide Spieler mit einem Würfel. Der Spieler mit der höheren Augenzahl gewinnt. Sortieren Sie die 4 Würfel gemäß ihrer Gewinnstärke.

Lösungsvorschlag:

Der Vergleich zwischen zwei Würfeln x, y basiert auf der Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl eines Würfels größer ist als die des anderen. Wir sagen

$$y \text{ dominiert } x \Leftrightarrow P(x < y) > 0.5$$

und schreiben abkürzend $x < y$.

Betrachten wir zum Beispiel A und B : Mit Wahrscheinlichkeit $4/6$ dominiert A den Würfel B . Letzterer gewinnt nur in 2 von 6 Fällen. $A > B$. Für A, C ist es ein wenig komplizierter. Falls A eine 4 zeigt ($4/6$ Wahrscheinlichkeit), so dominiert der Würfel mit Wahrscheinlichkeit $4/6$. Bei einer 0 verliert er sicher. $(4/6)^2 = 4/9 < 0.5$ also gilt $A < C$. Stellen wir die Wahrscheinlichkeiten in einer Tabelle für alle Paare da:

<	A	B	C	D
A	-	1/3	5/9	2/3
B	2/3	-	1/3	1/2
C	4/9	2/3	-	1/3
D	1/3	1/2	2/3	-

Verblüffenderweise gibt es keinen Würfel, der gegen alle anderen gewinnt. Je-

der Würfel ist stark gegenüber einem anderen Würfel, sodass sich ein Zyklus ergibt. Man spricht hier auch von nicht-transitiven Würfeln, da genau diese Eigenschaft ($x < y \wedge y < z \implies x < z$) fehlt.

Trotzdem lässt sich eine Ordnung aufstellen, falls wir die Regel hinzufügen, dass der Gegner zufällig einen Würfel zugeteilt bekommt.

Für A gilt die Gewinnwahrscheinlichkeit: $1/3 * (2/3 + 4/9 + 1/3) = 13/27$ Für B gilt die Gewinnwahrscheinlichkeit: $1/3 * (1/3 + 2/3 + 1/2) = 1/2$ Für C gilt die Gewinnwahrscheinlichkeit: $1/3 * (5/9 + 1/3 + 2/3) = 14/27$ Für D gilt die Gewinnwahrscheinlichkeit: $1/3 * (2/3 + 1/2 + 1/3) = 1/2$ Würfel C ist nach diesem Maß statistisch besser. Es gibt allerdings Varianten von Würfelmengen, die hier gleiche Werte aufweisen. Wichtiger Punkt aus dieser Aufgabe: Zum Sortieren wird immer eine klare Vergleichsrelation gebraucht, die transitiv sein sollte. Sortieralgorithmen lassen sich blind darauf anwenden und werden ein Ergebnis liefern, aber das muss nicht unbedingt stimmen. In diesem Fall kann es kein richtiges Ergebnis liefern.

Aufgabe Global 5-2 *Ausführungszeiten von Sortieralgorithmen*

Bisher haben wir theoretische Laufzeitanalysen von Sortieralgorithmen betrachtet. Verifizieren Sie die theoretischen Behauptungen experimentell oder widerlegen Sie sie. Welche Beobachtungen fallen Ihnen beim Vergleich aller 6 Sortierverfahren auf? Welche Ergebnisse liefert ein Vergleich der Pivotstrategien bei QuickSort?

Lösungsvorschlag:

Siehe `sorting.py`